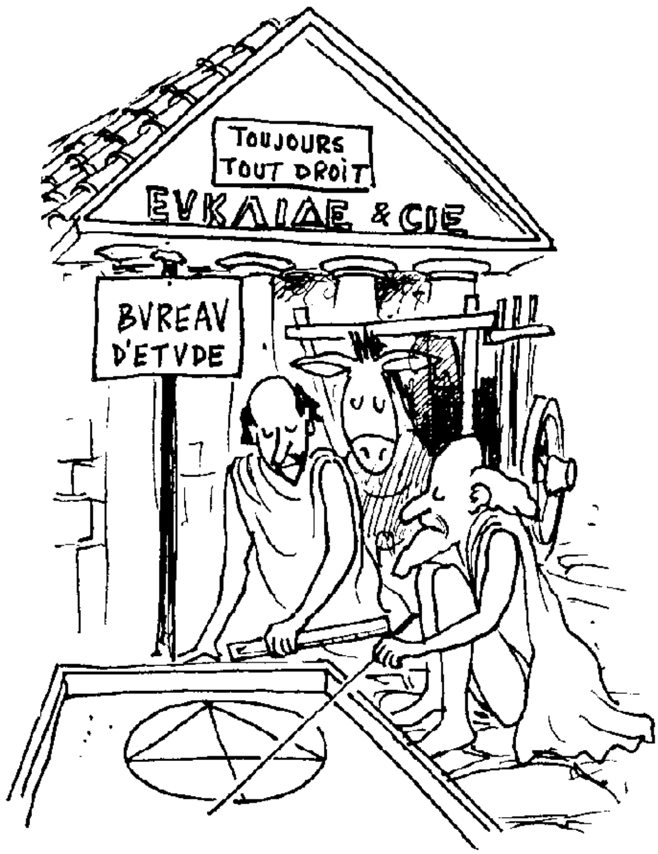
Les Aventures d'Anselme Lanturlu

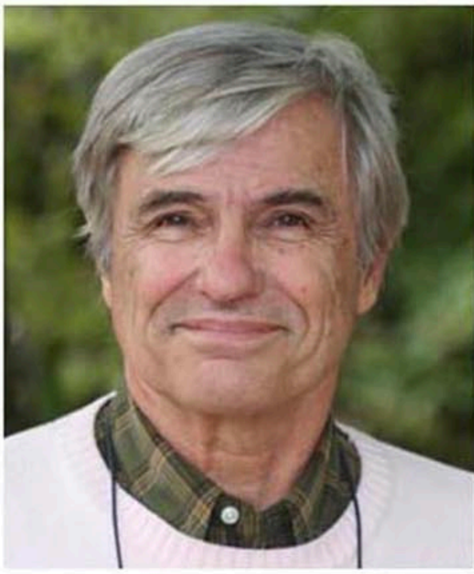
LE GEOMETRICON

Jean-Pierre Petit



Savoir sans Frontières

Association à but non lucratif créée en 2005 et gérée par deux scientifiques français. But : diffuser des connaissances scientifiques en utillisant la bande dessinée à travers des pdf gratuitement téléchargeables. En 2020 : 565 traductions en 40 langues avaient ainsi été réalisées. avec plus de 500.000 téléchargements.



Jean-Pierre Petit

Gilles d'Agostini

L'association est totalement bénévole. L'argent des dons est intégralement reversé aux traducteurs.

Pour faire un don, utilisez le bouton Paypal sur la page d'accueil du site Internet

http://www.savoir-sans-frontieres.com

PayPal
FAIRE UN DON

Coordonnées bancaires France ➔ Relevé d'Identité Bancaire (RIB) :

Etablissement	Quichet	N° de Compte	Cle RIB
20041	01008	1822226V029	88

Domiciliation : La banque postale
Centre de Marseille
13900 Marseille CEDEX 20
France

For other countries ➔ International Bank Account Number (IBAN) :

IBAN
FR 16 20041 01008 1822226V029 88

and ➔ Bank Identifier Code (BIC) :

BIC
PSSTFRPPMAR

Les statuts de l'association (en français) sont accessibles sur son site. La comptabilité y est accessible en ligne, en temps réel. L'association ne prélève sur ces dons aucune somme, en dehors des frais de transfert bancaire, de manière que les sommes versées aux traducteurs soient nettes.

L'association ne salarie aucun de ses membres, qui sont tous des bénévoles. Ceux-ci assument eux-mêmes les frais de fonctionnement, en particulier de gestion du site, qui ne sont pas supportés par l'association.

Ainsi, vous pourrez être assurés, dans cette sorte « d'œuvre humanitaire culturelle » que quelle que soit la somme que vous donniez, elle sera *intégralement* consacrée à rétribue les traducteurs.

Nous mettons en ligne en moyenne une dizaine de nouvelles traductions par mois.


y a-t-il un mathématicien dans la salle ?

AVERTISSEMENT

CECI N'EST NI UN TRAITÉ, NI UN COURS.

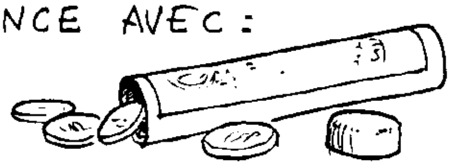
C'EST SIMPLEMENT L'HISTOIRE D'ANSELME LANTURLU

ET DE L'UN DE SES VOYAGES,

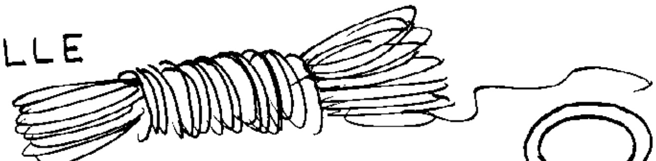
AU PAYS DE LA GÉOMÉTRIE.

A LIRE DE PRÉFÉRENCE AVEC :

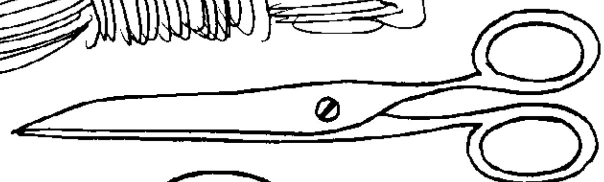
* D'ABORD DE L'ASPIRINE



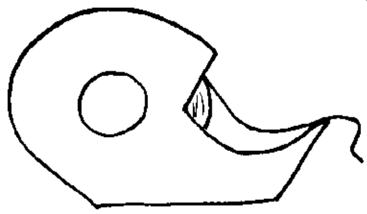
* PUIS DE LA FICELLE



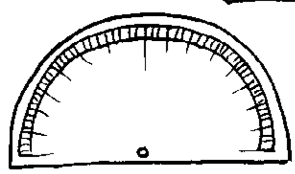
* DES CISEAUX



* DU RUBAN ADHÉSIF

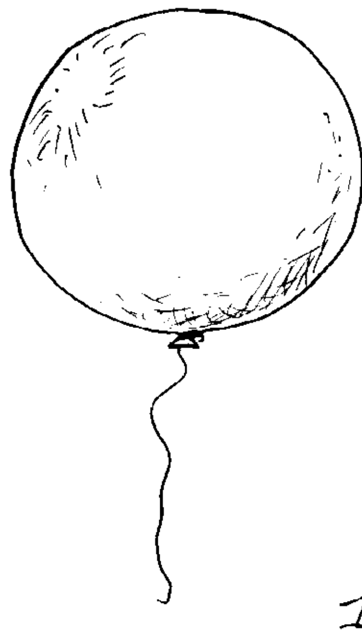


* UN RAPPORTEUR



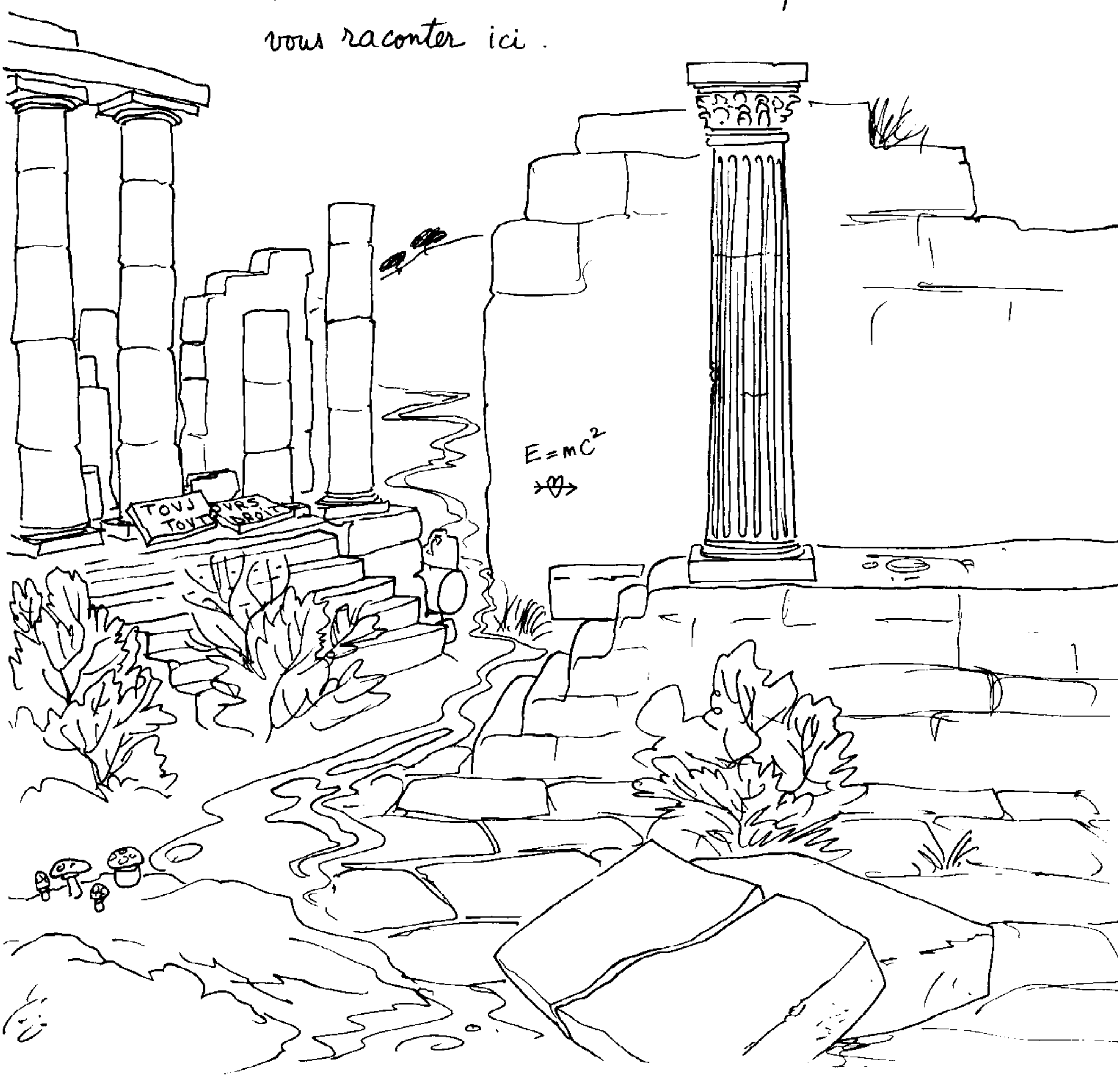
* ET UN JOLI BALLON

BIEN ROND...

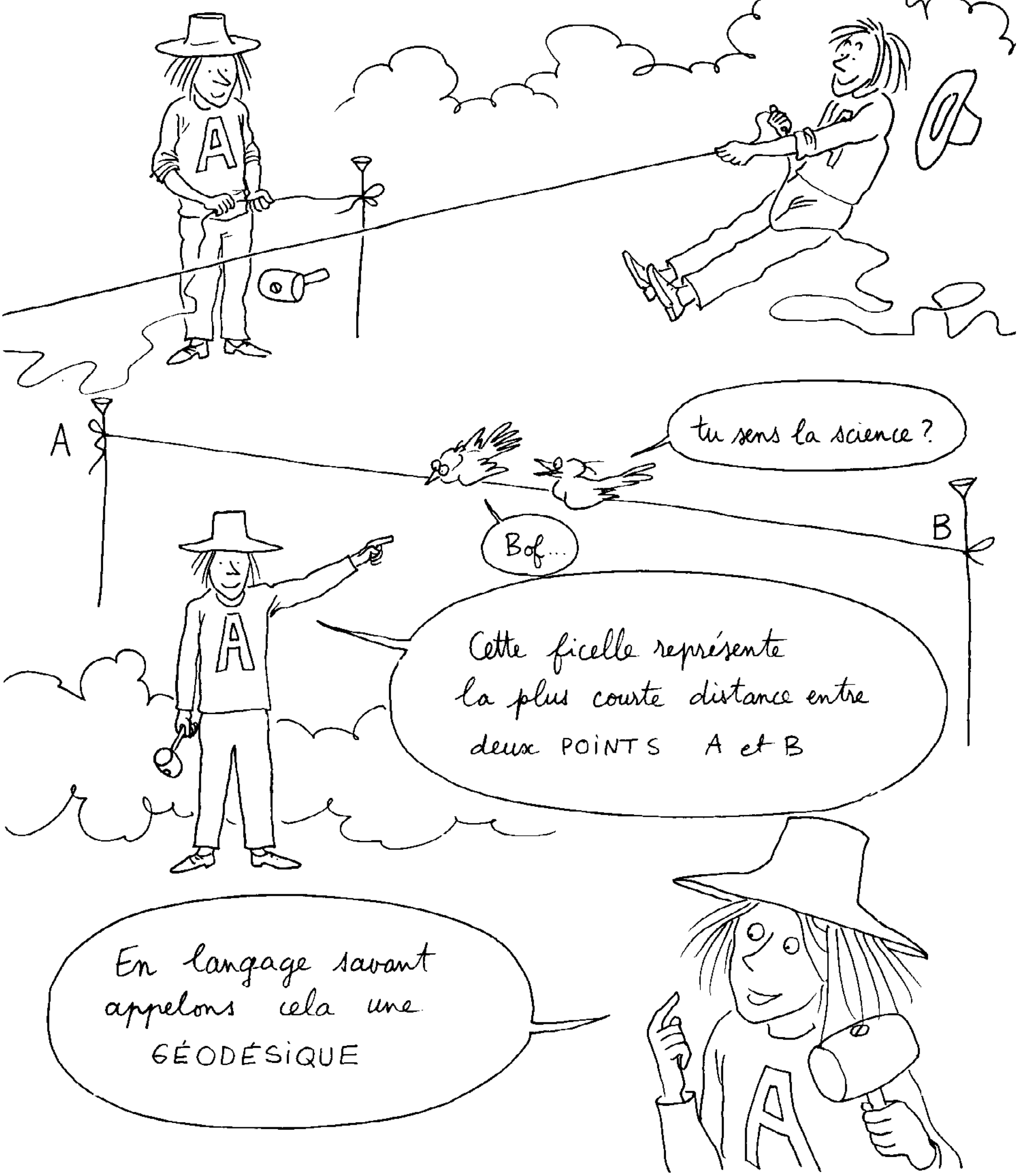


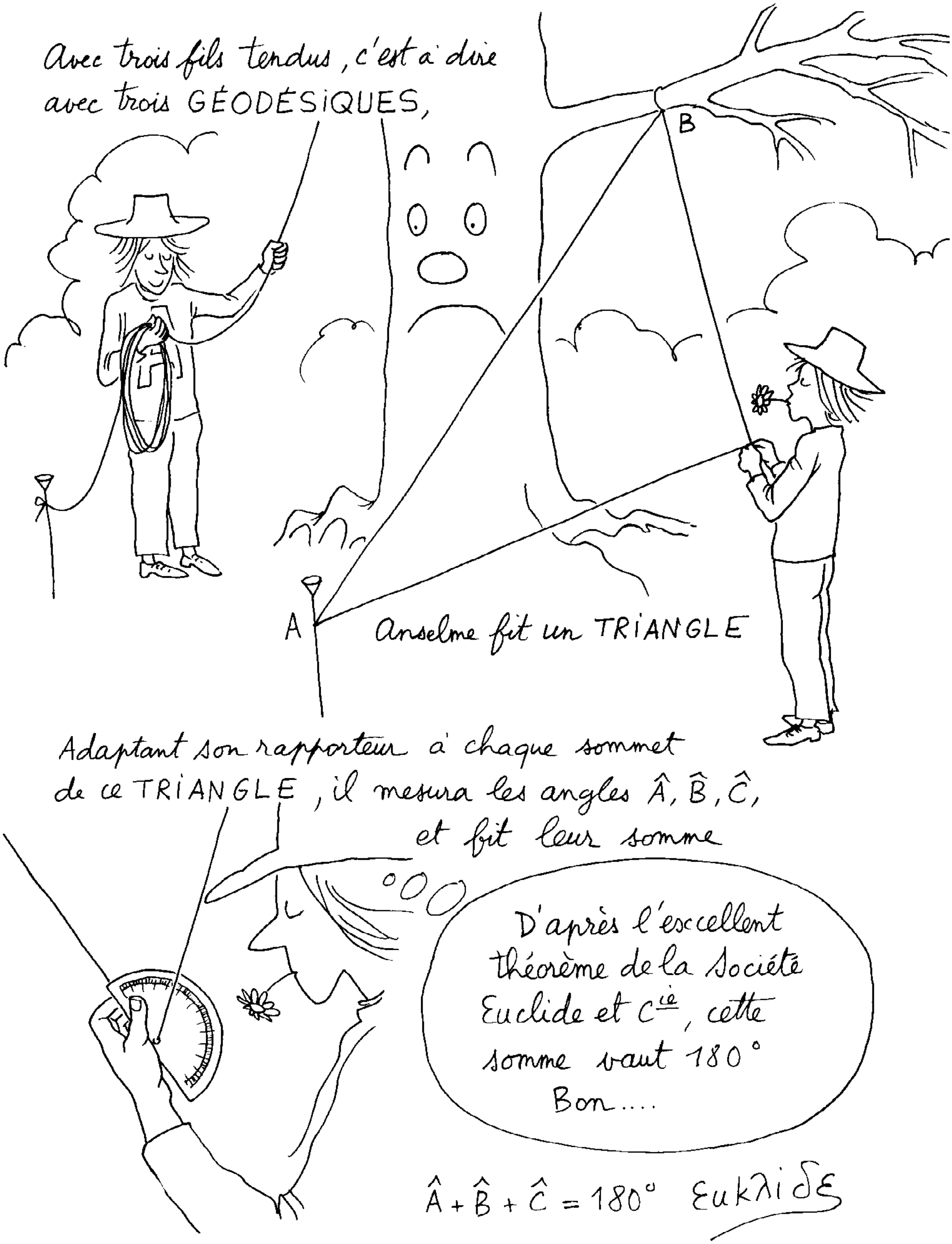
La Société Euclide et Cie naquit à Alexandrie au troisième siècle avant Jésus-Christ. Pendant deux mille deux cents ans les affaires prospérèrent. Les produits étaient appréciés et la clientèle satisfaite et fidèle.

Mais, peu à peu, les goûts des clients changèrent.
Certains, jadis inconditionnels de la marque,
à la suite de curieuses expériences, se demandèrent :
« Euclide, est-ce vraiment, partout et pour tout,
ce qu'il y a de mieux ? »
C'est l'histoire de l'un d'eux que nous allons
vous raconter ici.



PROLOGUE : Un jour, Anselme Lanturlu décida de tendre une ficelle entre deux piquets :

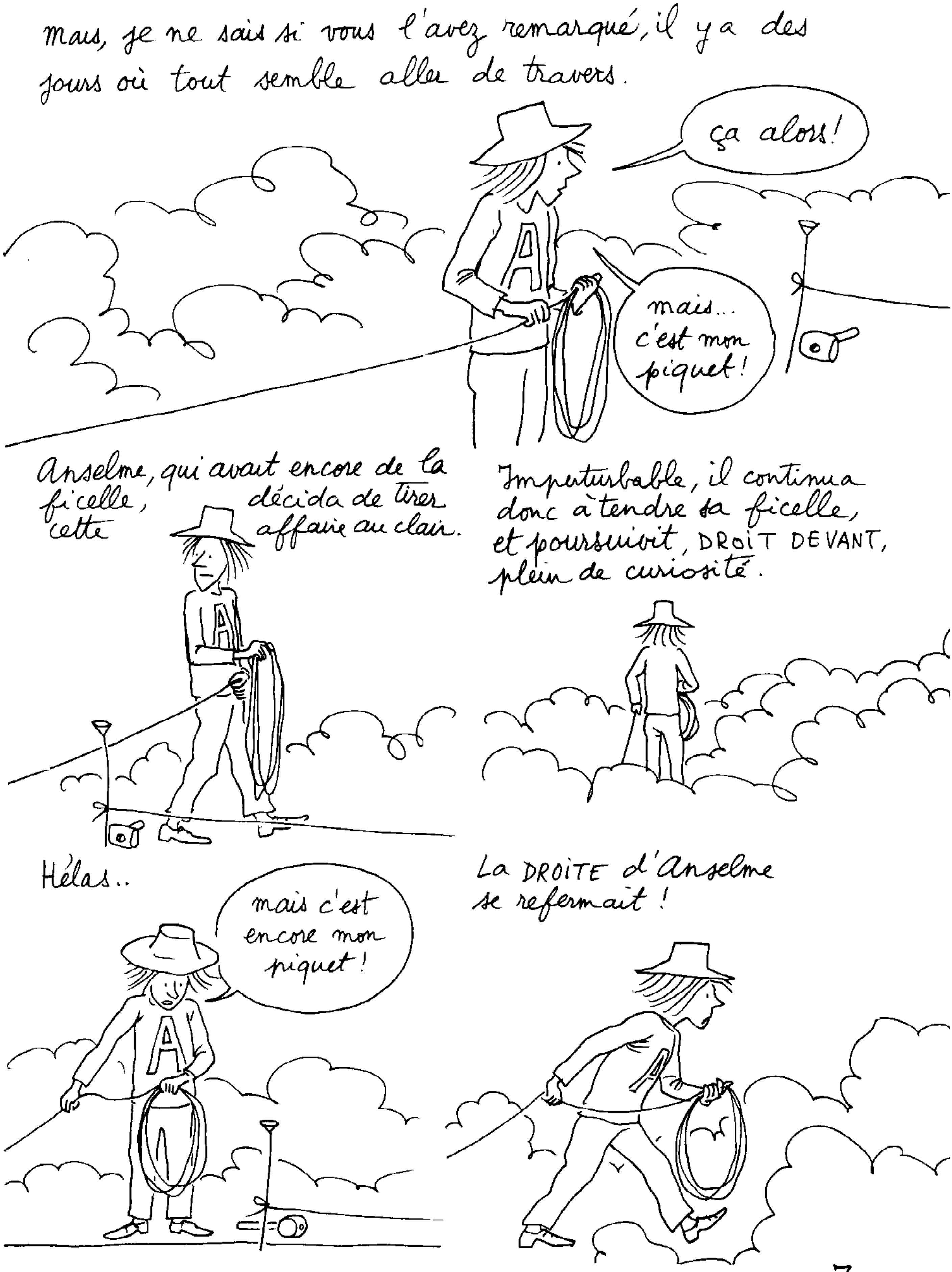




Avec trois fils tendus, c'est à dire avec trois GÉODÉSIQUES,
B
A
Anselme fit un TRIANGLE
Adaptant son rapporteur à chaque sommet de ce TRIANGLE, il mesura les angles Â, B̂, Ĉ, et fit leur somme
D'après l'excellent théorème de la Société Euclide et Cie, cette somme vaut 180° Bon....
Â + B̂ + Ĉ = 180° Ευκλιδε

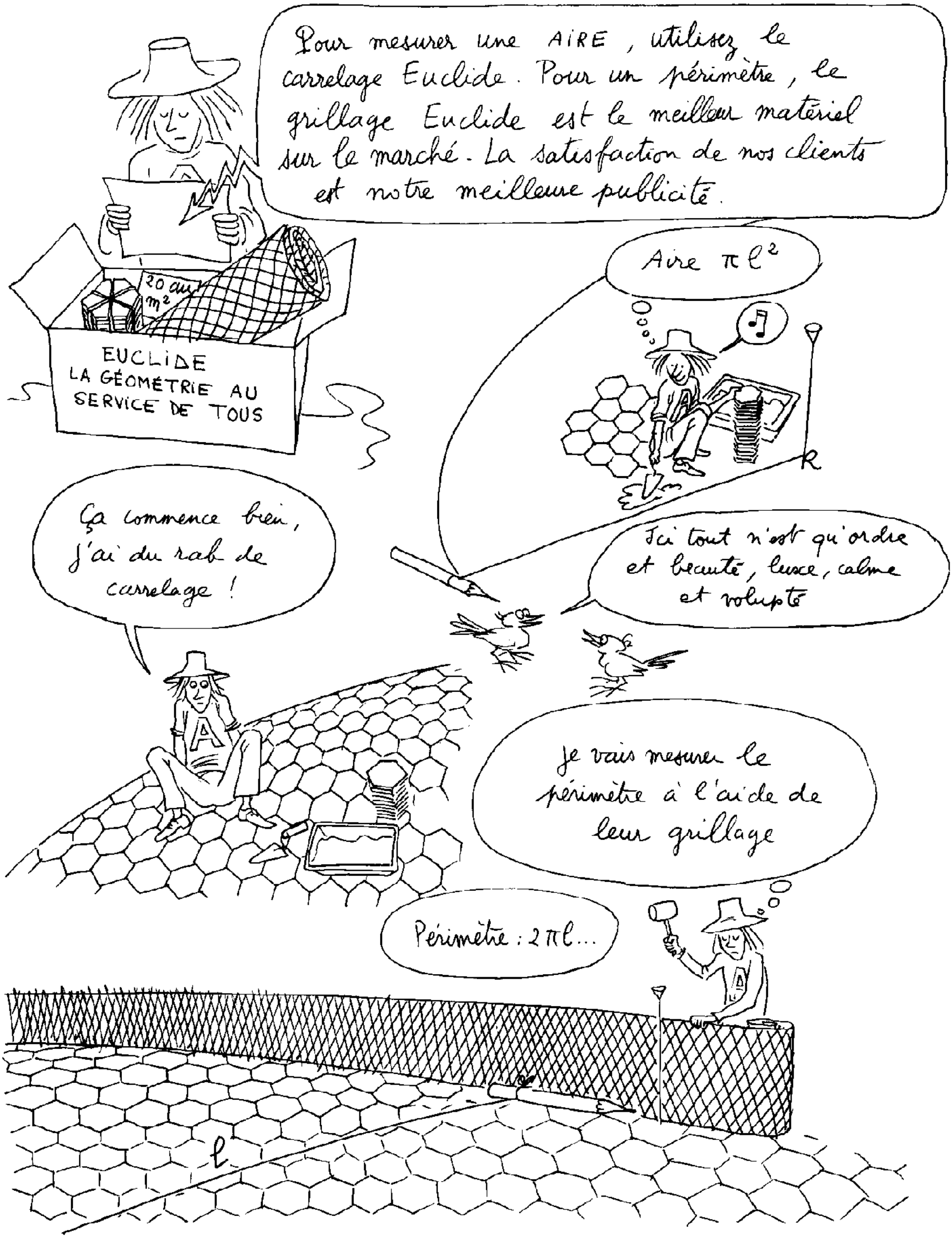
Le monde où vivait Anselme était nébuleux en diable. On s'y serait mouché avec le nez d'un autre.

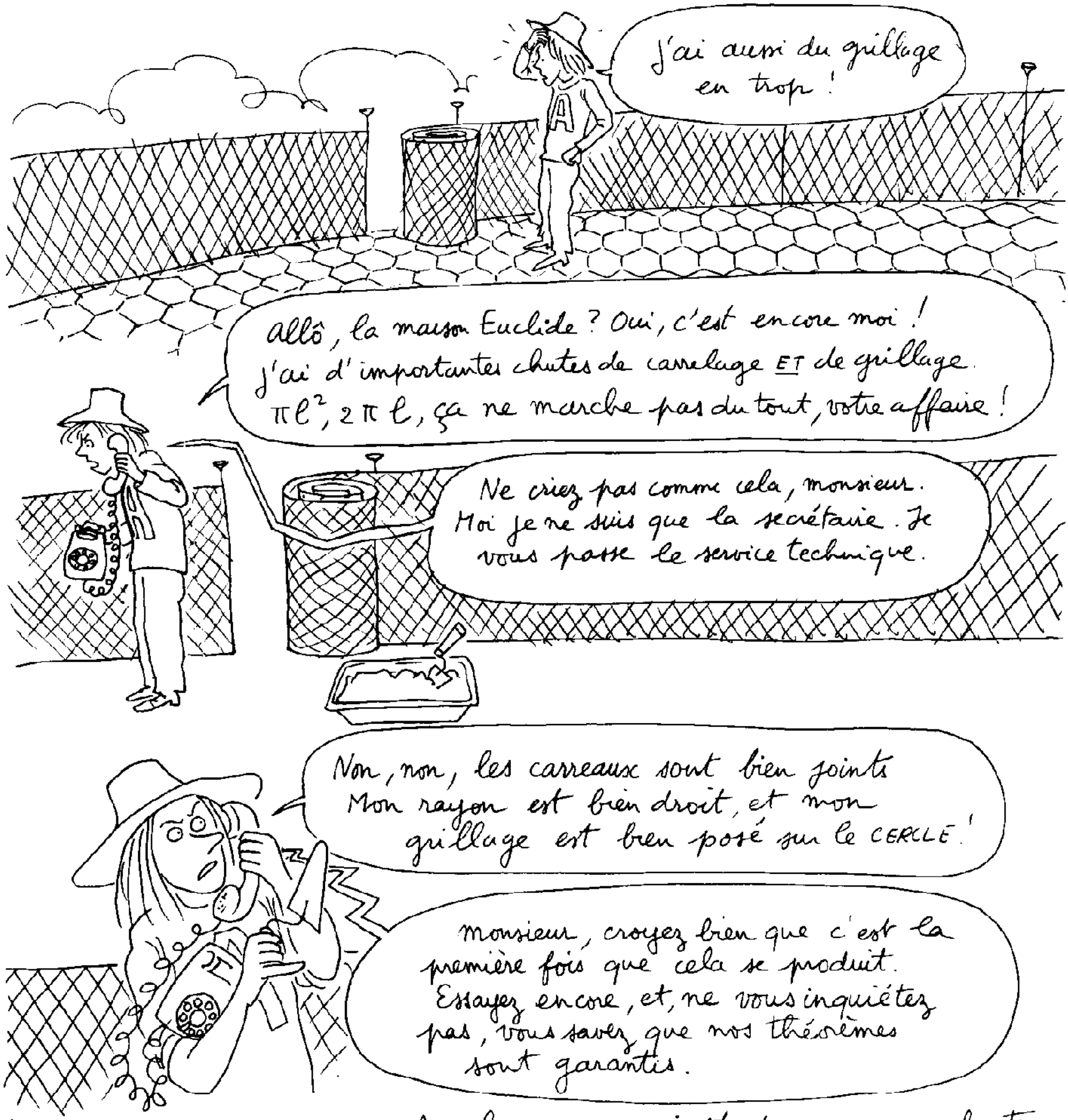
Anselme marcha longtemps, longtemps...
Derrière lui sa ficelle se déroulait, si bien tendue, qu'il se moquait bien des incertitudes de sa marche dans la brume : il fabriquait une impeccable GÉODÉSIQUE.

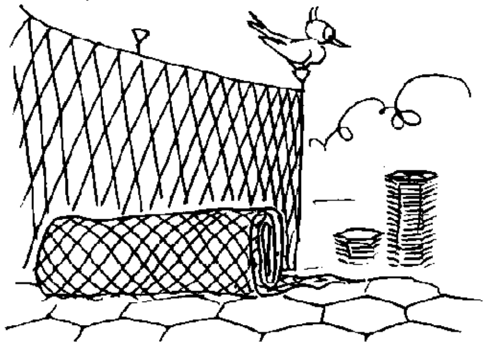

mais, je ne sais si vous l'avez remarqué, il y a des jours où tout semble aller de travers.
ça alors!
mais... c'est mon piquet!
Anselme, qui avait encore de la ficelle, décida de tirer cette affaire au clair.
Imperturbable, il continua donc à tendre sa ficelle, et poursuivit, DROIT DEVANT, plein de curiosité.
Hélas..
mais c'est encore mon piquet!
La DROITE d'Anselme se refermait !

? ?
? ? ? ? ?
? ? ? ?
Essayons un théorème de chez Euclide. Je vais tirer trois GÉODÉSIQUES d'égale longueur. Cela me donnera un TRIANGLE dont les trois angles doivent avoir chacun 60°; leur somme faisant 180°. C'est écrit sur la notice.
B
60
60
60
A
C
Â+B̂+Ĉ = 180°
après, j'aviserai.
RATIO OMNIA VINCIT
A
A
B
Voilà mon deuxième sommet B. Plus qu'à tendre deux autres fils pour trouver le troisième
C'est beau la science
B
A
Oh, là là! Les angles sont bien égaux, mais ils font plus de 60°.
un problème?
C
A
leur somme, bien sûr, fait plus de 180°!
GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE
EUCLIDE
EUCLIDE


Pourtant, en posant ma règle bien A PLAT j'ai vérifié que mes fils étaient bien DROITS.
EUCLIDE
allô, la maison Euclide ? Dites, j'ai des ennuis avec votre matériel.
Une seconde, je vous passe le service technique.
Des ennuis avec nos triangles ? Etonnant. Pourquoi n'essayez-vous pas nos cercles ? Nos clients en sont très contents.
...Un cercle est donc l'ensemble des points situés à une distance ℓ d'un point fixe.
Et vous dites: périmètre $2\pi\ell$, AIRE : $\pi\ell^2$ c'est noté.
à votre service
ℓ

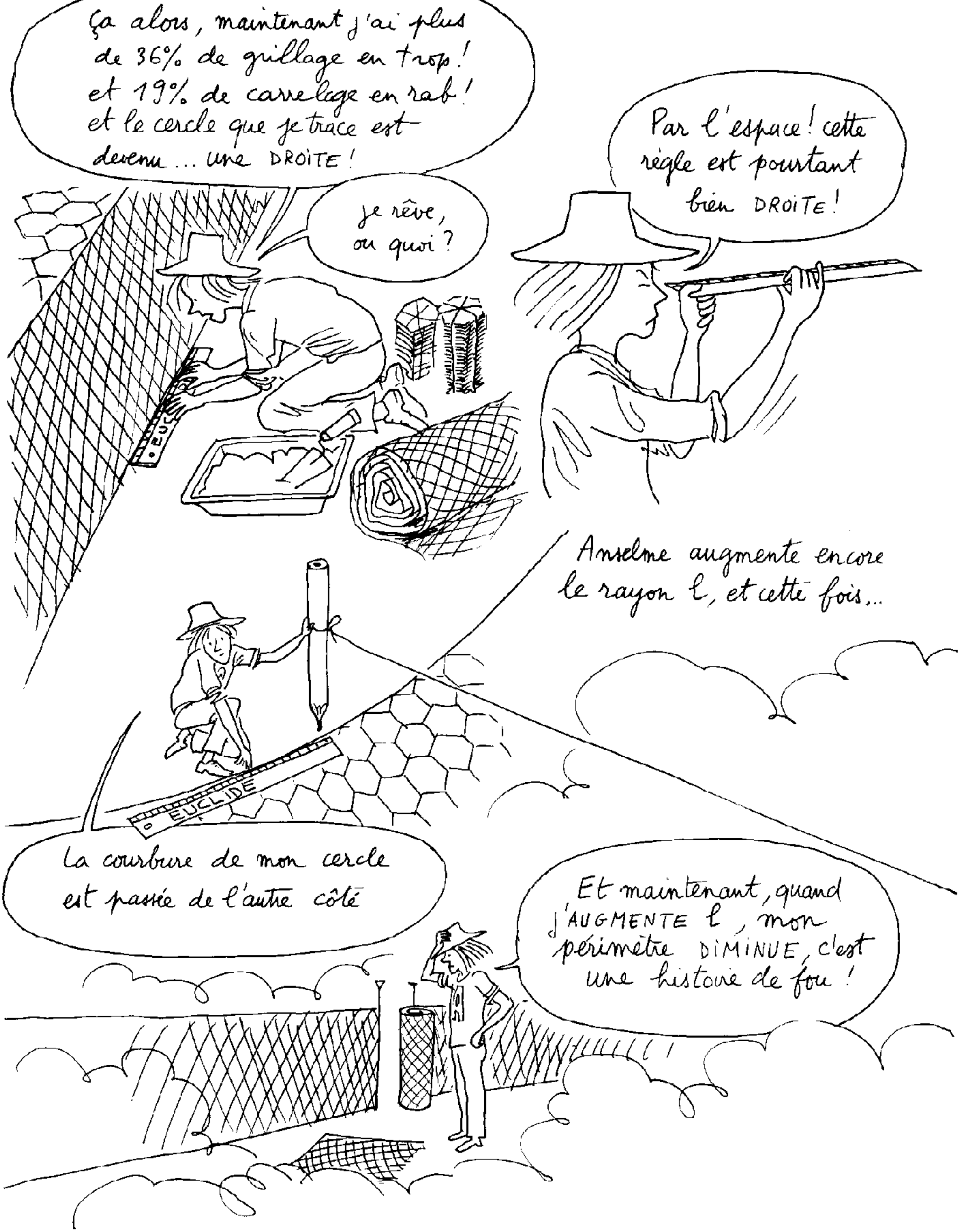

Pour mesurer une AIRE, utilisez le carrelage Euclide. Pour un périmètre, le grillage Euclide est le meilleur matériel sur le marché. La satisfaction de nos clients est notre meilleure publicité.
20 au m²
EUCLIDE
LA GÉOMÉTRIE AU SERVICE DE TOUS
Aire πℓ²
R
Ça commence bien, j'ai du rab de carrelage !
Ici tout n'est qu'ordre et beauté, luxe, calme et volupté
Je vais mesurer le périmètre à l'aide de leur grillage
Périmètre : 2πℓ...
ℓ



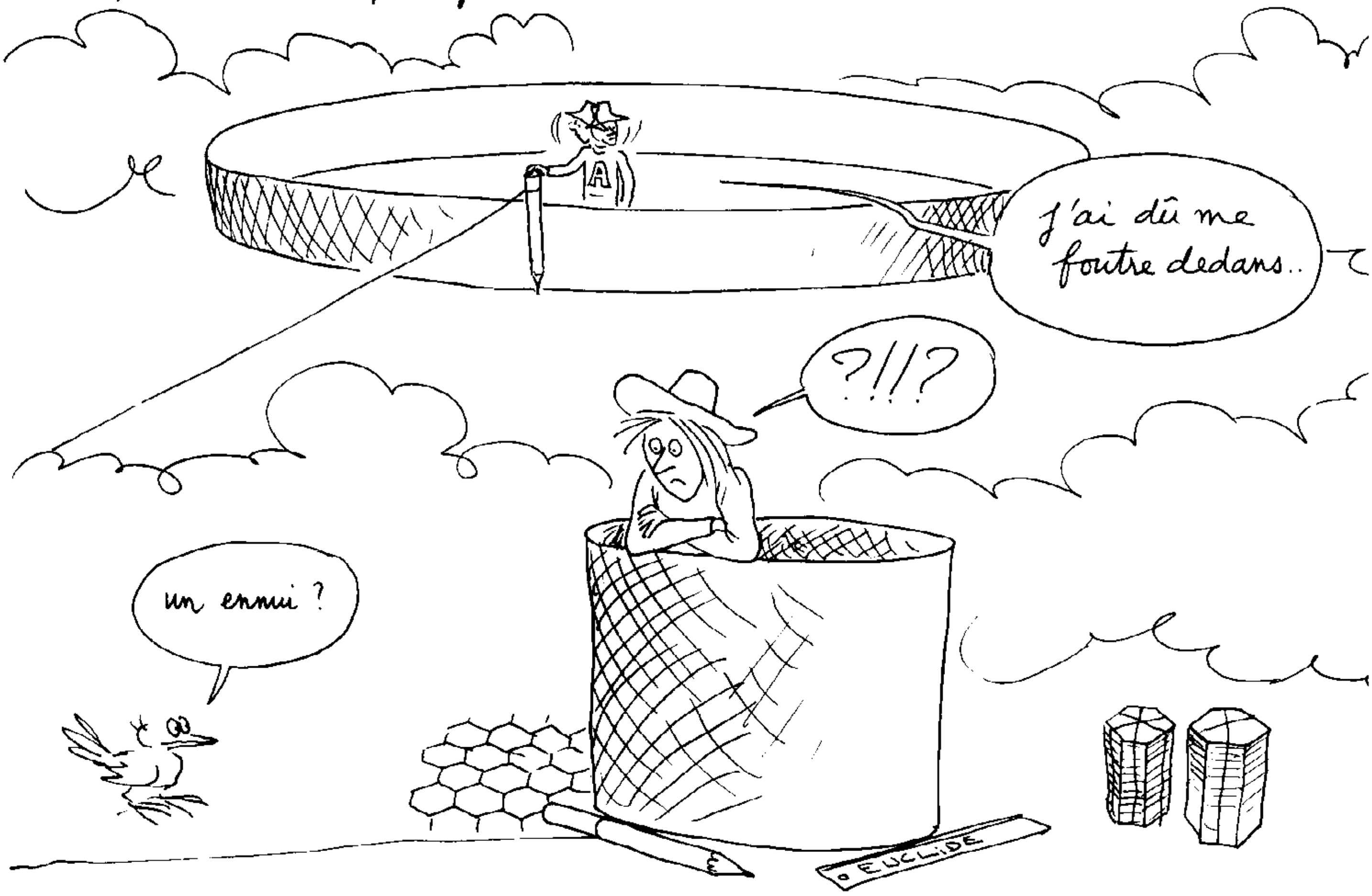


Anselme poursuivit donc son exploration en augmentant à chaque fois le rayon l de son cercle.

Mais les chutes se firent de plus en plus importantes.


Ça alors, maintenant j'ai plus de 36% de grillage en trop ! et 19% de carrelage en rab ! et le cercle que je trace est devenu ... une DROITE !
Je rêve, ou quoi ?
Par l'espace ! cette règle est pourtant bien DROITE !
EUCLIDE
Anselme augmente encore le rayon l, et cette fois...
EUCLIDE
La courbure de mon cercle est passée de l'autre côté
Et maintenant, quand j'AUGMENTE l, mon périmètre DIMINUE, c'est une histoire de fou !

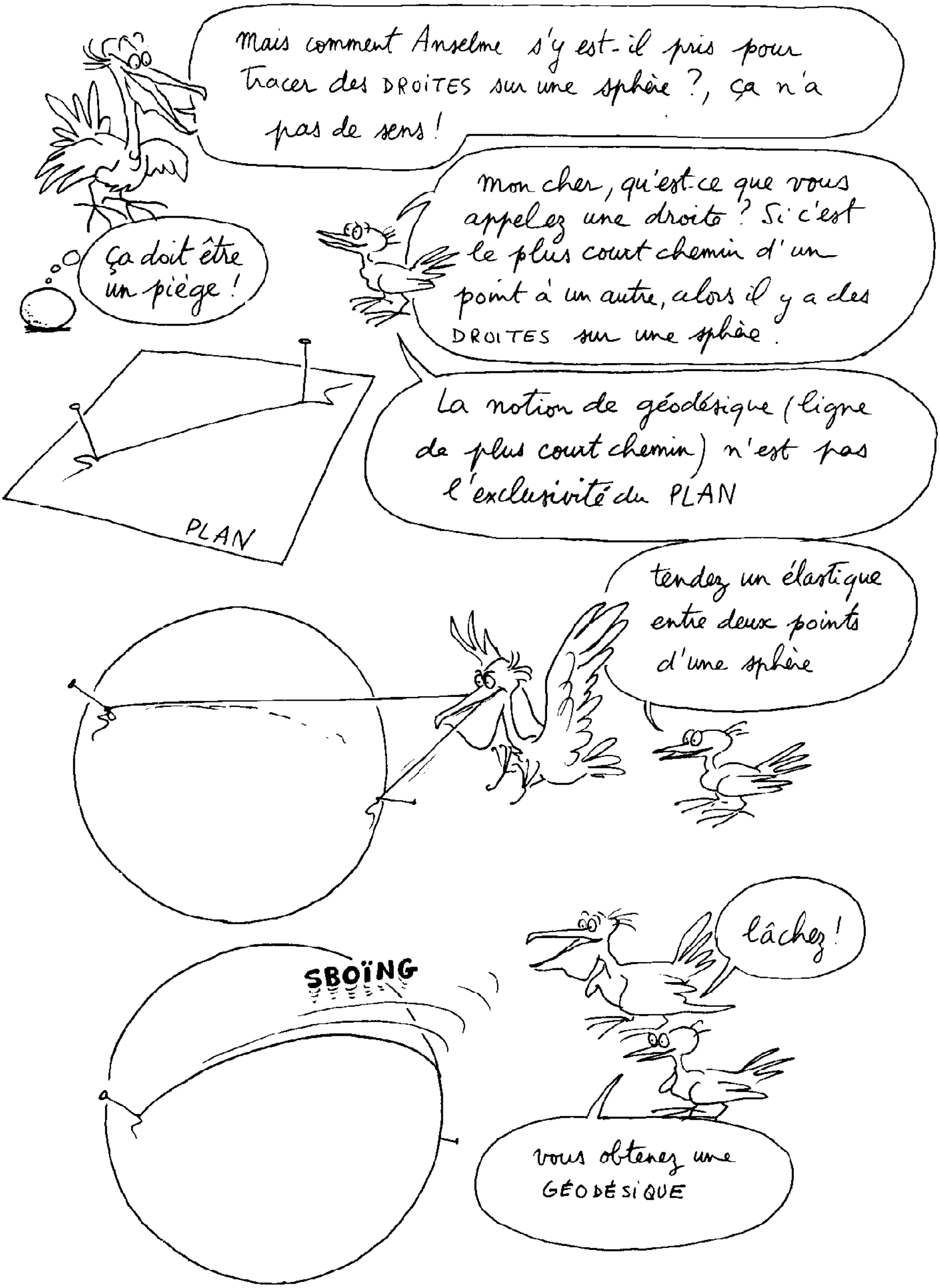
Après un dernier pavage :

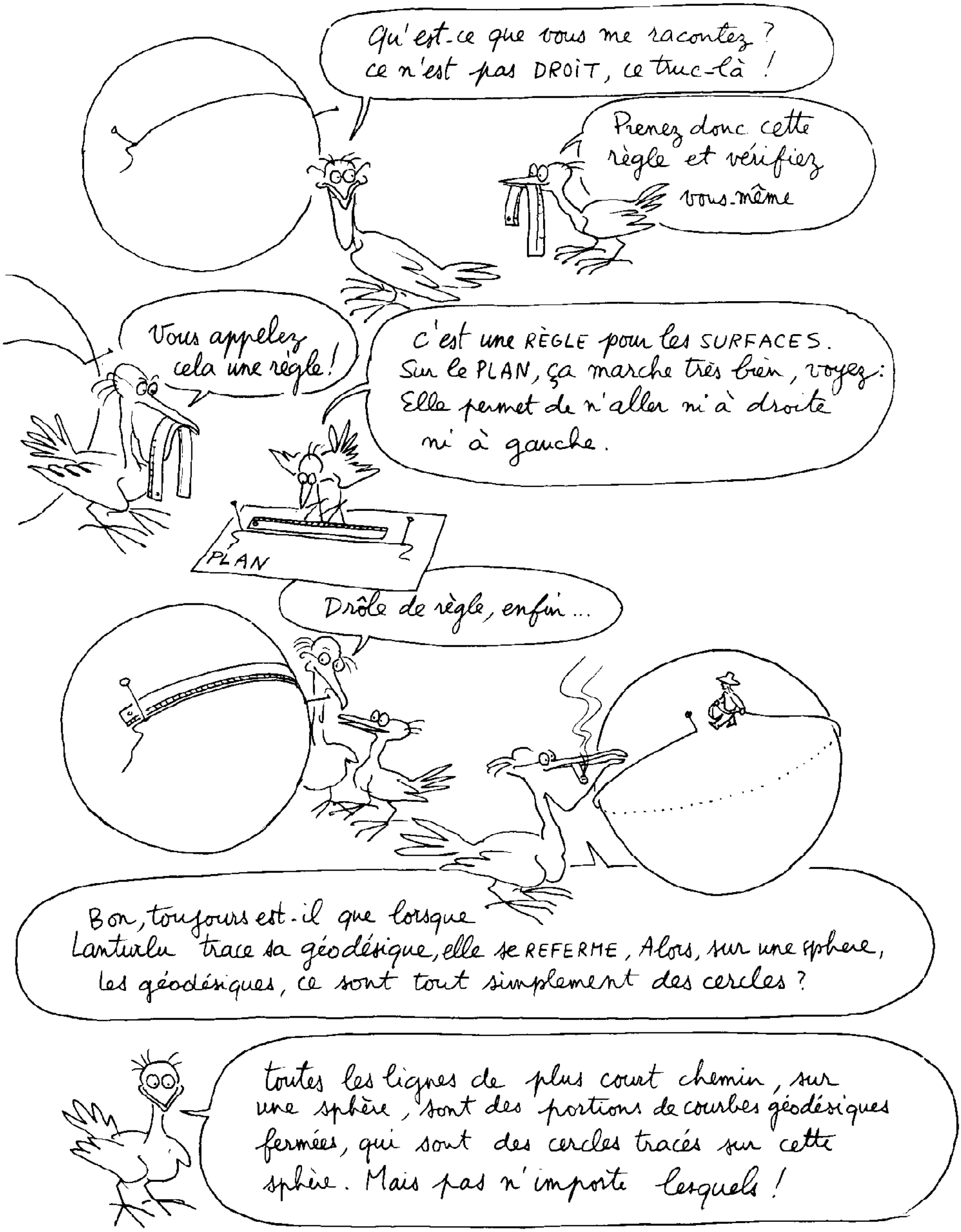


QUE S'EST-IL PASSÉ ?

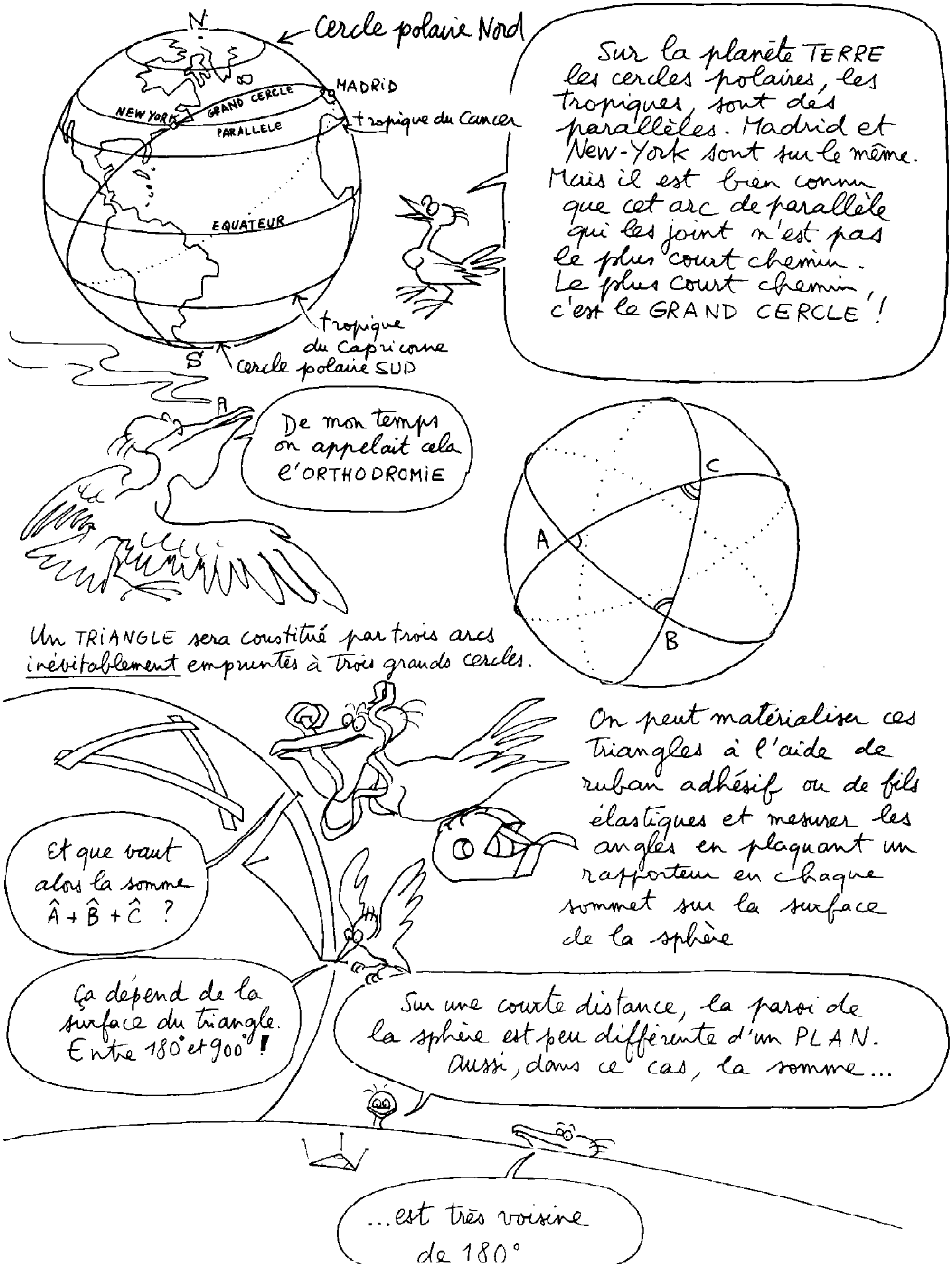
Pour le savoir, dissipons les nuées :

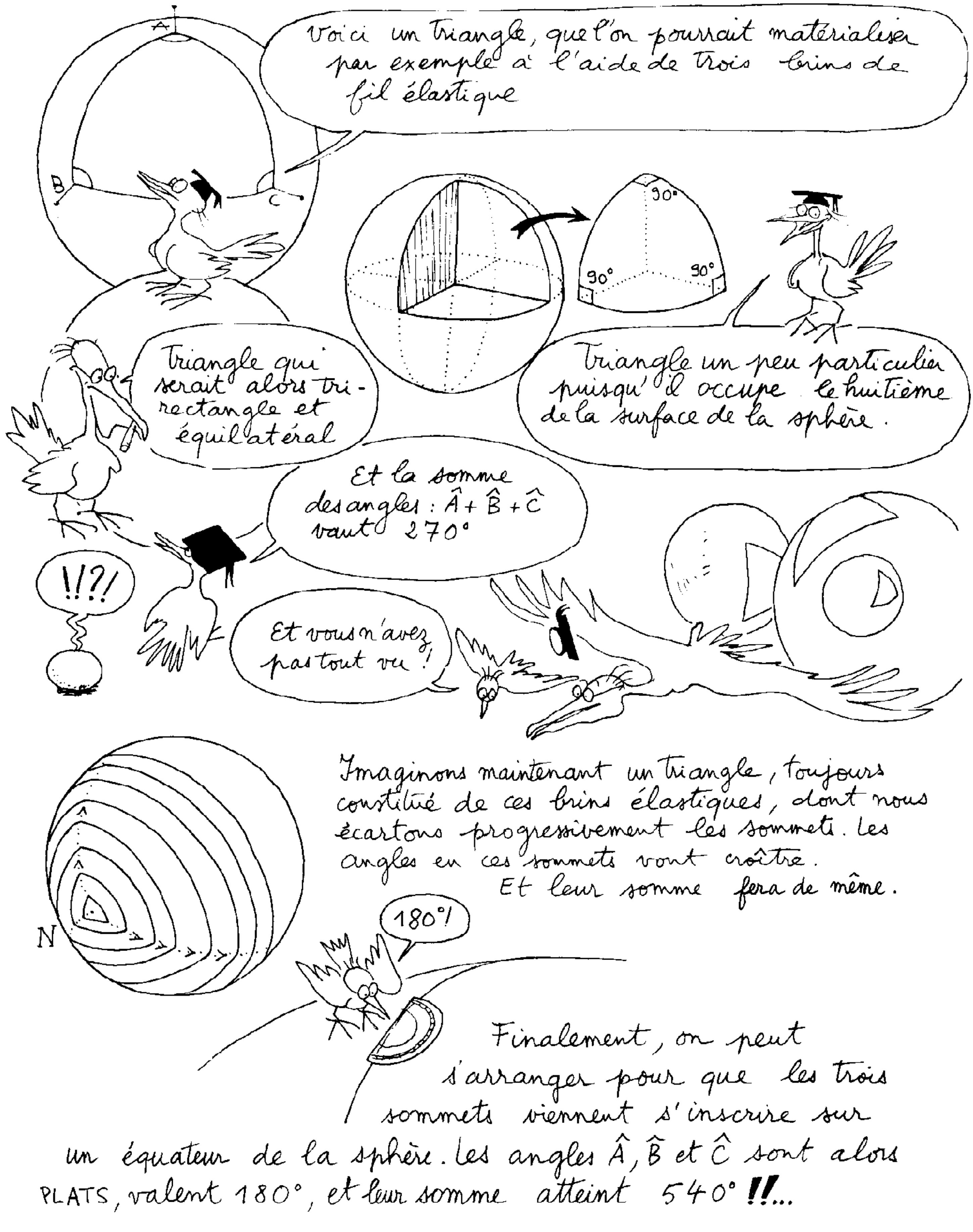
Anselme comprend soudain qu'il est sur une sphère sur laquelle il a appliqué les règles de la GÉOMÉTRIE du PLAN


Mais comment Anselme s'y est-il pris pour tracer des DROITES sur une sphère ?, ça n'a pas de sens !
ça doit être un piège !
Mon cher, qu'est-ce que vous appelez une droite ? Si c'est le plus court chemin d'un point à un autre, alors il y a des DROITES sur une sphère.
La notion de géodésique (ligne de plus court chemin) n'est pas l'exclusivité du PLAN
PLAN
tendez un élastique entre deux points d'une sphère
lâchez !
SBOÏNG
vous obtenez une GÉODÉSIQUE

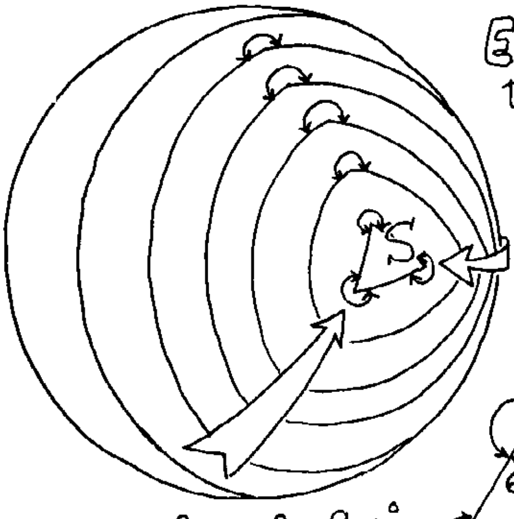

Qu'est-ce que vous me racontez ? ce n'est pas DROIT, ce truc-là !
Prenez donc cette règle et vérifiez vous-même
Vous appelez cela une règle !
c'est une RÈGLE pour les SURFACES. Sur le PLAN, ça marche très bien, voyez : Elle permet de n'aller ni à droite ni à gauche.
PLAN
Drôle de règle, enfin ...
Bon, toujours est-il que lorsque Lanturlu trace sa géodésique, elle se REFERME, Alors, sur une sphère, les géodésiques, ce sont tout simplement des cercles ?
toutes les lignes de plus court chemin, sur une sphère, sont des portions de courbes géodésiques fermées, qui sont des cercles tracés sur cette sphère. Mais pas n'importe lesquels !

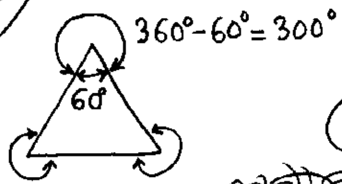

!???!
Qu'est-ce que c'est que cette histoire? Vous jouez sur les mots. Vous voulez dire qu'il esciste, sur une sphère, plusieurs espèces différentes de cercles ?!?
Bon sang, je croyais comprendre, et voilà que je ne comprends plus rien du tout...
Un cherde, ch'est l'enchemble des points situés à une distance constante ℓ d'un point fixe N, que nous appellerons PÔLE.
N
ℓ
mmm...
Voici tout un ensemble de cercles de même pôle N, que nous appellerons PARALLÈLES.
N
S
EQUATEUR
ℓ
ℓ'
S
Ces cercles parallèles sont aussi les points à égale distance ℓ' du point S "pôle sud", antipode du "pôle nord" N
Parmi ceux-ci, il en esciste un, plus grand que les autres, qui pourrait servir d'ÉQUATEUR à la sphère.
Je comprends enfin pourquoi un cercle, sur une sphère, a DEUX centres N et S !
Nous appellerons ces "EQUATEURS" des GRANDS CERCLES de la SPHÈRE. Et ce seront précisément ses GÉODÉSIQUES.
C'est la première fois que je vois une GÉODÉSIQUE de près... très impressionnant !


N
Cercle polaire Nord
MADRID
NEW YORK
GRAND CERCLE
PARALLELE
tropique du Cancer
EQUATEUR
tropique du Capricorne
S
cercle polaire SUD
Sur la planète TERRE les cercles polaires, les tropiques, sont des parallèles. Madrid et New-York sont sur le même. Mais il est bien connu que cet arc de parallèle qui les joint n'est pas le plus court chemin. Le plus court chemin c'est le GRAND CERCLE !
De mon temps on appelait cela l'ORTHODROMIE
C
A
B
Un TRIANGLE sera constitué par trois arcs inévitablement empruntés à trois grands cercles.
On peut matérialiser ces triangles à l'aide de ruban adhésif ou de fils élastiques et mesurer les angles en plaquant un rapporteur en chaque sommet sur la surface de la sphère
Et que vaut alors la somme Â + B̂ + Ĉ ?
Ça dépend de la surface du triangle. Entre 180° et 900° !
Sur une courte distance, la paroi de la sphère est peu différente d'un PLAN. Aussi, dans ce cas, la somme...
...est très voisine de 180°


A
B
C
Voici un triangle, que l'on pourrait matérialiser par exemple à l'aide de trois brins de fil élastique
90°
90°
90°
Triangle qui serait alors tri-rectangle et équilatéral
Triangle un peu particulier puisqu'il occupe le huitième de la surface de la sphère.
Et la somme des angles : Â + B̂ + Ĉ vaut 270°
!!?!
Et vous n'avez pas tout vu !
Imaginons maintenant un triangle, toujours constitué de ces brins élastiques, dont nous écartons progressivement les sommets. Les angles en ces sommets vont croître.
Et leur somme fera de même.
N
180°!
Finalement, on peut s'arranger pour que les trois sommets viennent s'inscrire sur un équateur de la sphère. Les angles Â, B̂ et Ĉ sont alors PLATS, valent 180°, et leur somme atteint 540° !!...

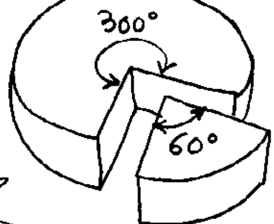
En prolongeant cette migration des sommets du triangle sur l'autre hémisphère, celui-ci va converger vers le point S, antipodal de N. Si on conserve aux angles aux sommets leur définition de départ, chacun d'eux vaudra alors plus de 180° ! Pour être précis, ils vaudront chacun 360° − 60° = 300° :





Somme : 300 × 3 = 900°

La circonférence complète représente 360°

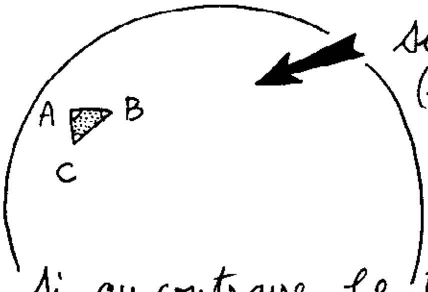


Ainsi, sur la sphère, la somme des angles d'un triangle peut aller de 180° à 900° !

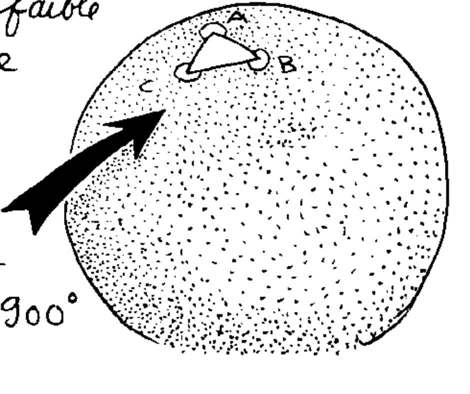
Suivant le théorème de Gauss, la somme des angles d'un triangle tracé sur une sphère vaut :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\left(1 + \frac{A}{3{,}1416\,R^2}\right) \text{ degrés}$$

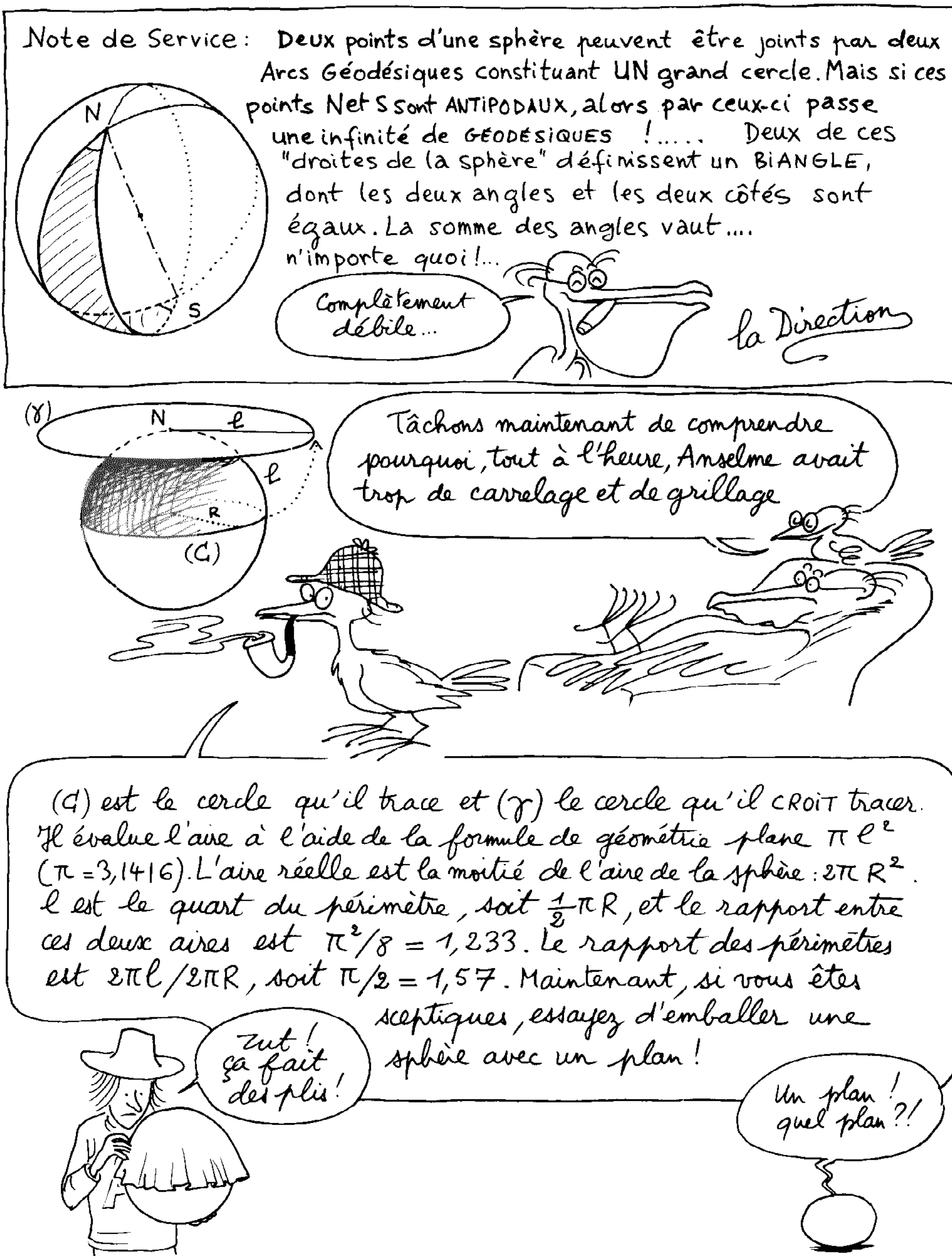
où R est le rayon de ladite sphère et A l'aire du triangle.

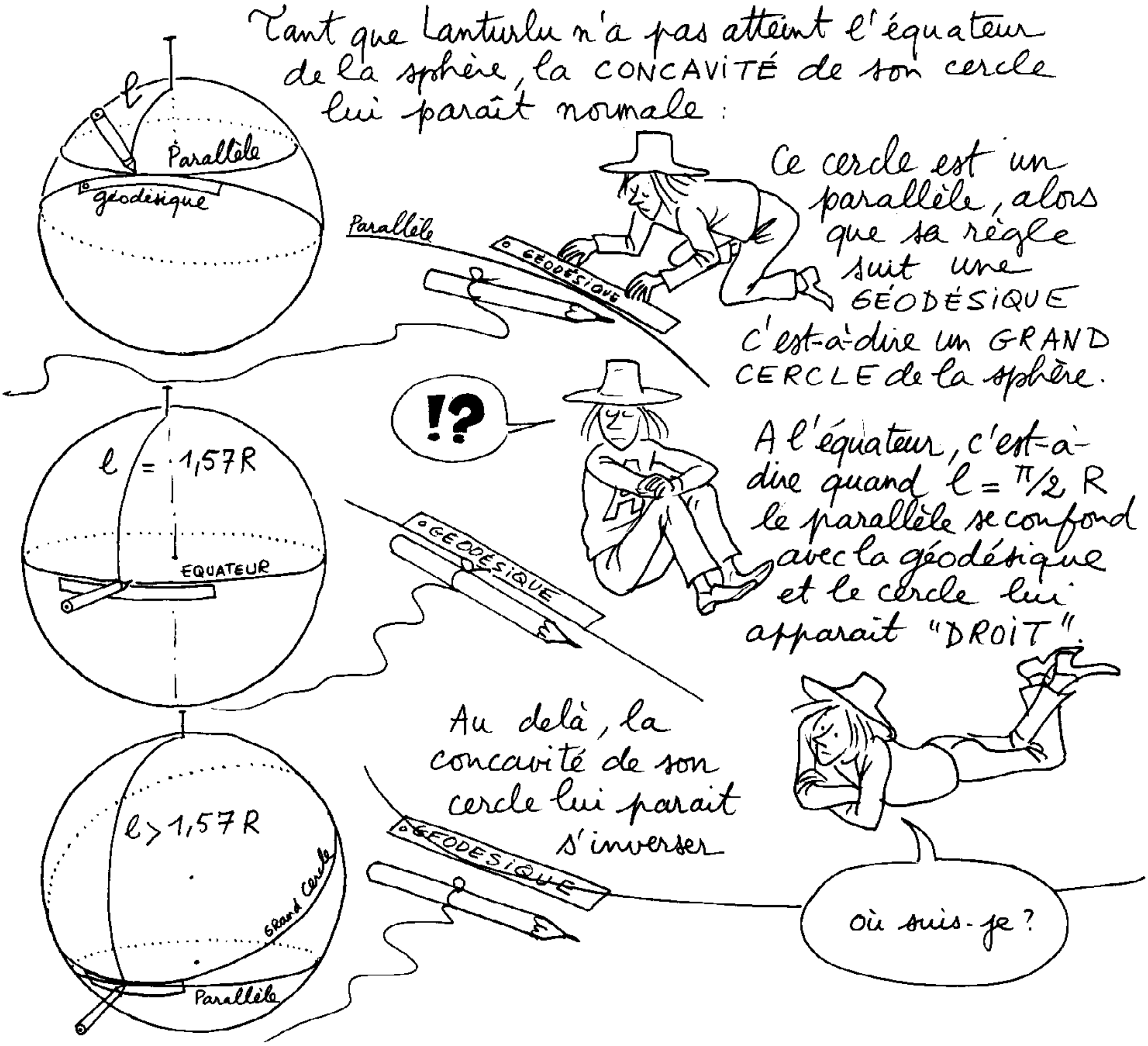


Si le triangle est d'aire faible (par rapport à celle de la sphère), on retrouve Euclide ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$)

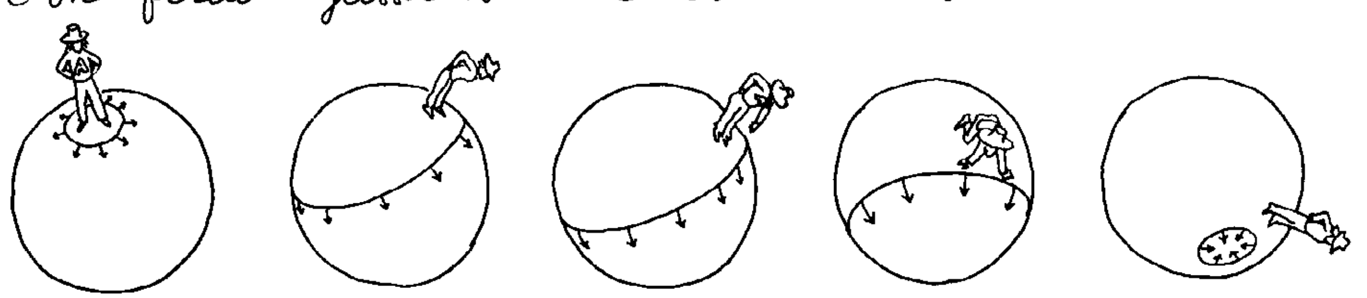


Si, au contraire, le triangle a quasiment la surface de la sphère ($4 \times 3{,}1416 \times R^2$), on retombe sur les 900°

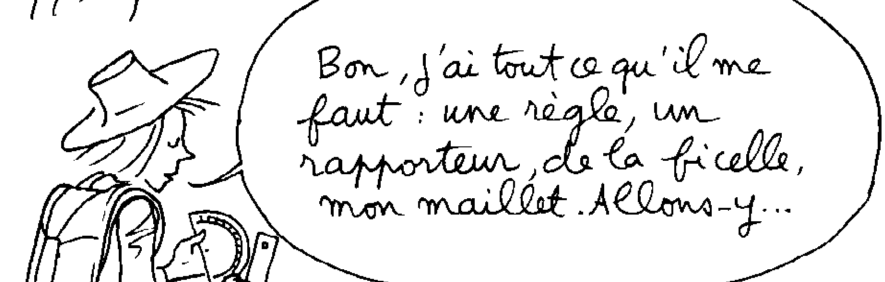

Note de Service : Deux points d'une sphère peuvent être joints par deux Arcs Géodésiques constituant UN grand cercle. Mais si ces points N et S sont ANTIPODAUX, alors par ceux-ci passe une infinité de GÉODÉSIQUES !..... Deux de ces "droites de la sphère" définissent un BIANGLE, dont les deux angles et les deux côtés sont égaux. La somme des angles vaut.... n'importe quoi !...
N
S
Complètement débile...
la Direction
(γ)
N
ℓ
ℓ
R
(C)
Tâchons maintenant de comprendre pourquoi, tout à l'heure, Anselme avait trop de carrelage et de grillage
(C) est le cercle qu'il trace et (γ) le cercle qu'il CROIT tracer. Il évalue l'aire à l'aide de la formule de géométrie plane $\pi \ell^2$ ($\pi = 3,1416$). L'aire réelle est la moitié de l'aire de la sphère : $2\pi R^2$. ℓ est le quart du périmètre, soit $\frac{1}{2}\pi R$, et le rapport entre ces deux aires est $\pi^2/8 = 1,233$. Le rapport des périmètres est $2\pi\ell/2\pi R$, soit $\pi/2 = 1,57$. Maintenant, si vous êtes sceptiques, essayez d'emballer une sphère avec un plan !
Zut ! ça fait des plis !
Un plan ! quel plan ?!



Cette propriété explique comment on peut à volonté "entrer" ou "sortir" d'un cercle, sans le franchir, lorsqu'il est tracé sur une sphère. Il faut imaginer ce cercle comme une bague élastique que l'on ferait glisser sur une boule de billard.



Anselme mit un certain temps à digérer tous ces aspects, découverts par le mathématicien GAUSS (1777-1855). Il décida de partir à la découverte du monde des SURFACES :

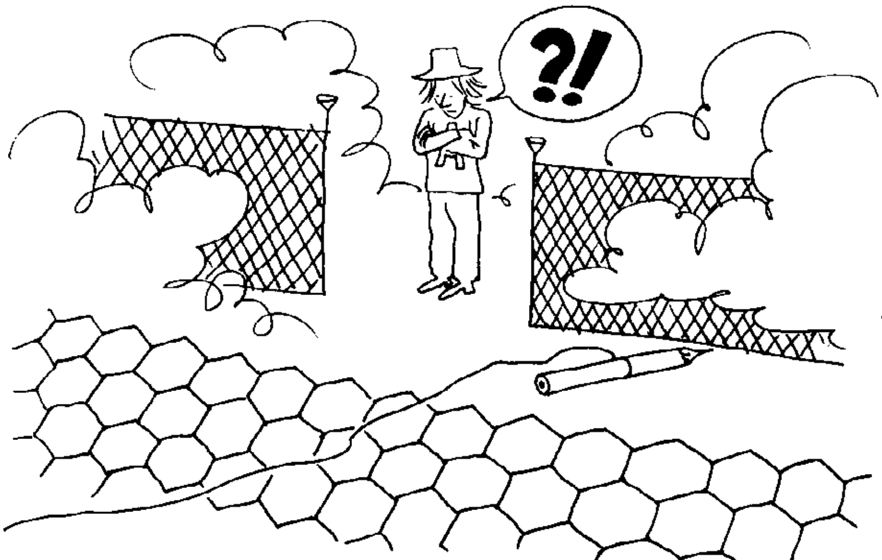


Parfois la science amène à prendre des risques.

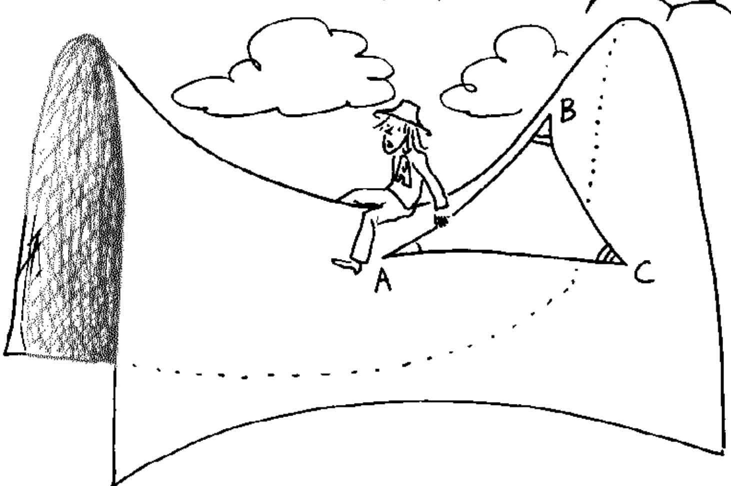
Ayant atterri dans un monde nouveau, Anselme déroule une nouvelle fois une GÉODÉSIQUE, mais, cette fois :

La géodésique ne se referme pas.

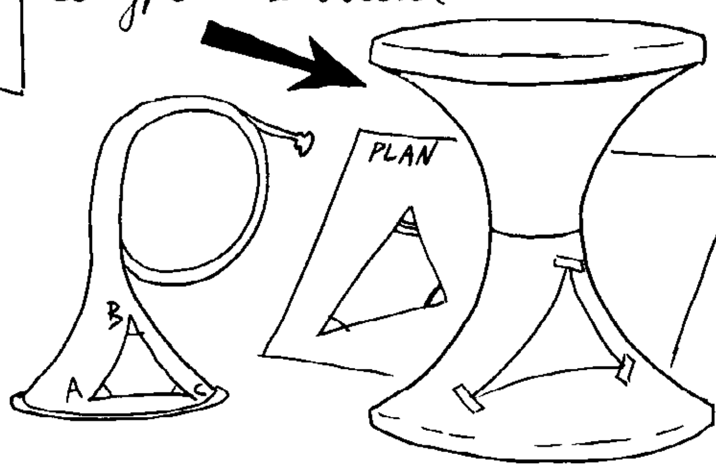
A l'aide de trois fils bien tendus, Anselme construit un triangle, mais la somme des angles aux sommets se révèle, cette fois, inférieure à 180°



Un cercle étant toujours l'ensemble des points situés à une même distance ℓ d'un point fixe, Lanturlu constate que ce cercle, tracé sur cette nouvelle surface, a un périmètre SUPÉRIEUR à $2\pi\ell$, tandis que son aire EXCÈDE $\pi\ell^2$.
Dissipons les nuées :



La surface affecte, cette fois, la forme d'un col de montagne ou d'une selle de cheval. Certains objets de votre vie de tous les jours peuvent également convenir : un cor de chasse ou ce type de tabouret :



COURBURE :

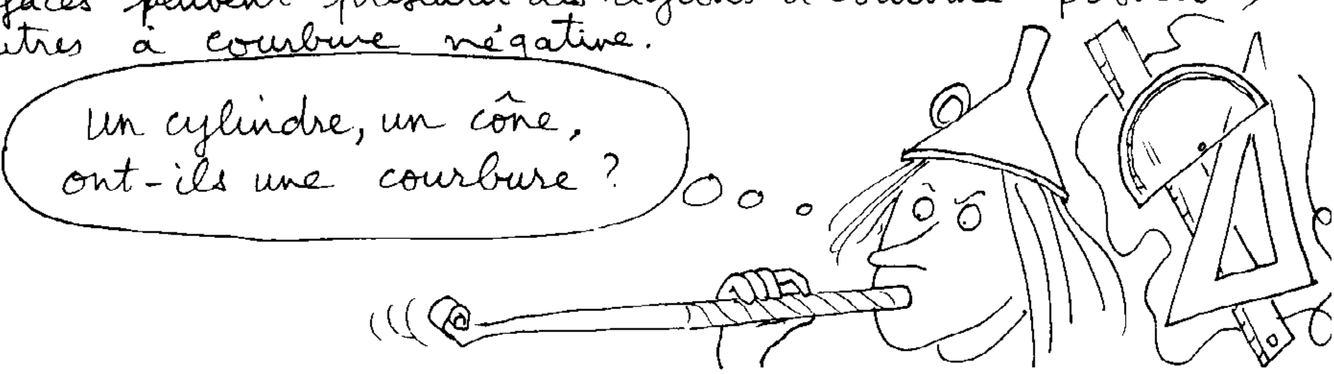
Une surface courbe est une surface où les théorèmes euclidiens ne marchent pas. La courbure peut être positive ou négative.

Sur une surface à COURBURE POSITIVE, la somme des angles d'un triangle est supérieure à 180°. Si on trace un cercle de rayon ℓ, sa surface est inférieure à $\pi\ell^2$ et son périmètre inférieur à $2\pi\ell$.

Sur une surface à COURBURE NÉGATIVE la somme des angles d'un triangle est inférieure à 180°. Si on trace un cercle de rayon ℓ, sa surface est supérieure à $\pi\ell^2$ et son périmètre supérieur à $2\pi\ell$.

Tout à l'heure, Anselme avait constaté qu'en tentant de REVÊTIR une sphère, surface à courbure positive, avec un élément plan, des plis apparaissaient. Le revêtement d'une surface à courbure négative par un plan est également impossible : des craquements apparaissent. Ce test de l'emballage est le plus simple pour déterminer si la courbure est positive ou négative.

Comme on peut le voir sur la page précédente, les surfaces peuvent présenter des régions à courbure positive, d'autres à courbure négative.

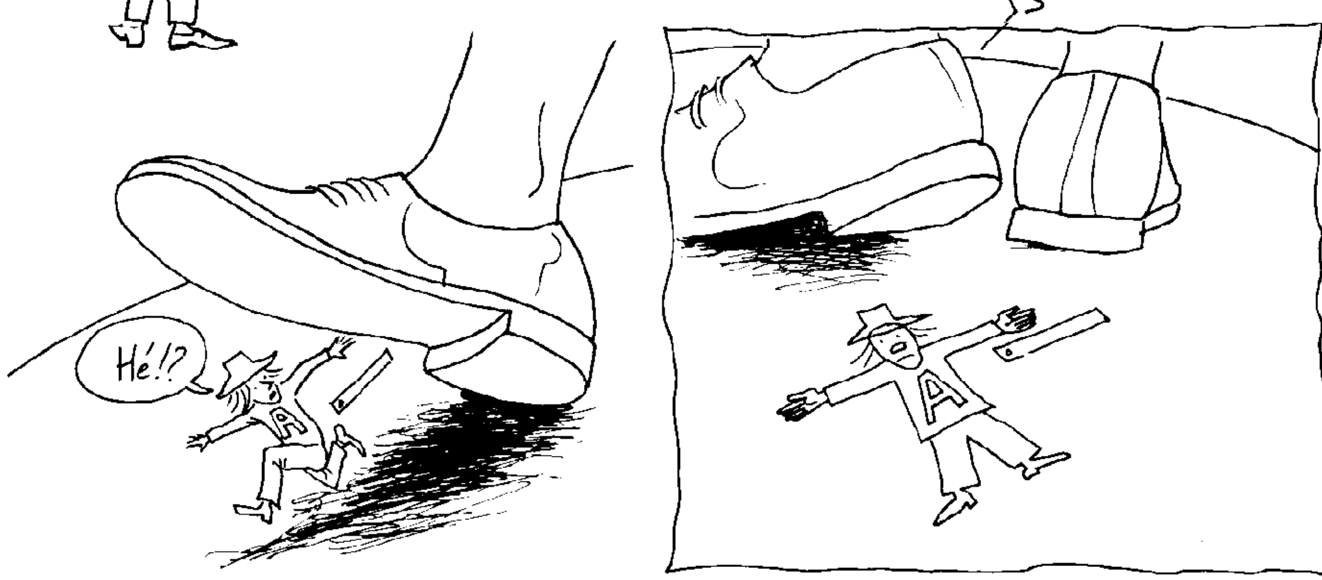



test de l'emballage
un cylindre, un cône, se laissent revêtir par un plan !
Pas de panique. Je colle trois fils élastiques, c'est à dire trois géodésiques, sur mon cylindre à l'aide de ruban adhésif...
B
A
C
...maintenant je marque mes géodésiques SUR la surface...
je mets mon cylindre bien A PLAT
!...
B
A
C
Suivant notre définition, les cylindres et les cônes, obéissant à la géométrie EUCLIDIENNE, sont des SURFACES PLANES !!!

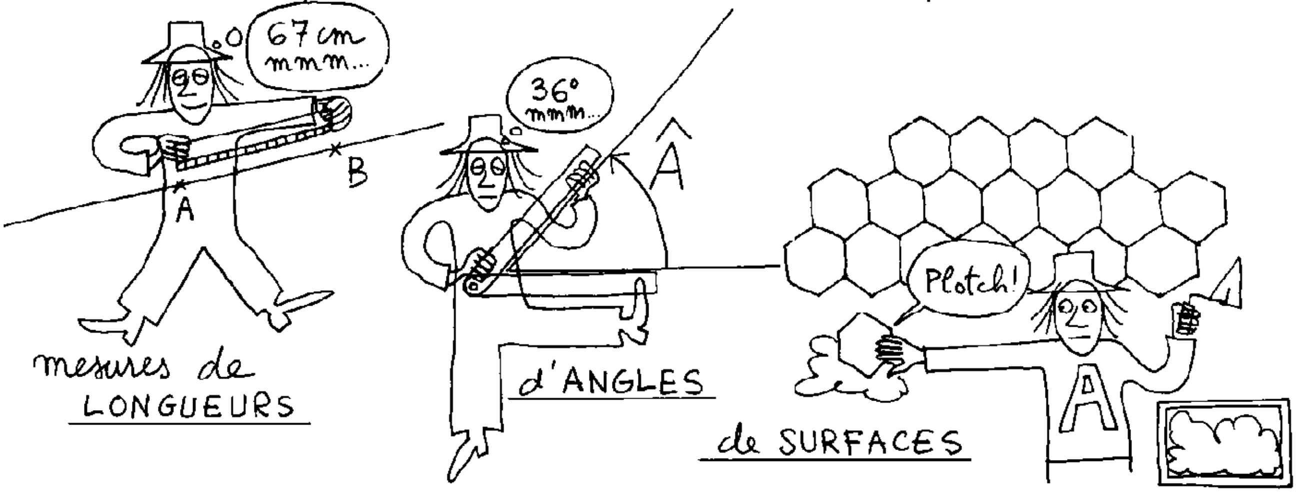
LA NOTION D'ESPACE :

Tout à l'heure, des nuées empêchaient Anselme de voir plus loin que le bout de son nez... ou presque. S'il n'en avait pas été ainsi il aurait pu percevoir la COURBURE de son ESPACE SPHÉRIQUE.

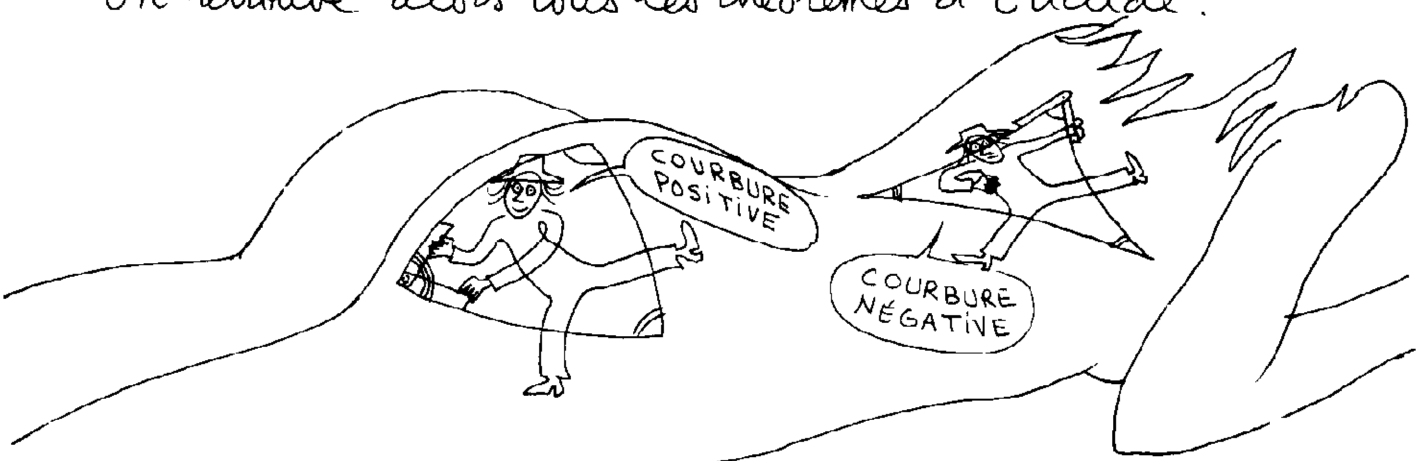
Il y a une autre façon d'empêcher Lanturlu de VOIR cette courbure : c'est de lui faire habiter la surface, de faire en sorte qu'il APPARTIENNE à celle-ci.



On notera que cette situation nouvelle n'empêche nullement les



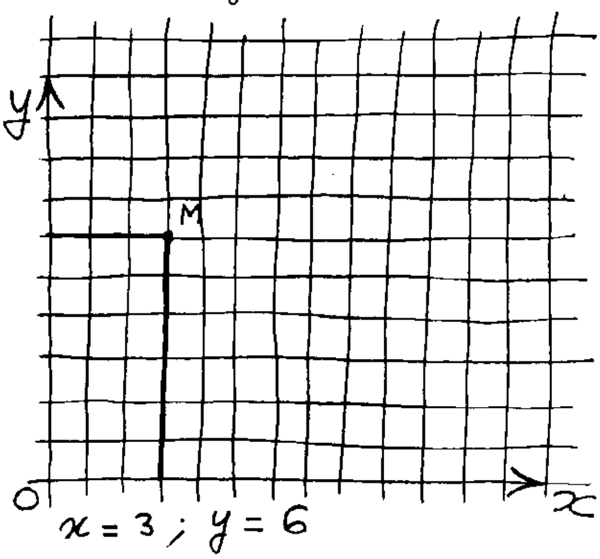
Bien qu'étant confiné DANS la surface, anselme aurait très bien pu constater la courbure et définir son signe (Positif ou négatif), et même la mesurer, sans pour cela être capable de la VOIR. Si la somme des angles d'un triangle vaut 180°, alors cette surface est PLANE.
Si cette somme excède 180°, la courbure est positive et Anselme peut calculer le rayon de courbure R local à l'aide de la formule : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\left(1 + \frac{A}{3,14\,R^2}\right)$ degrés
où A est l'aire du triangle
Si cette somme est inférieure à 180°, on peut définir un rayon de courbure R, donné par : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180\left(1 - \frac{A}{3,14\,R^2}\right)$
mais il n'a plus le sens physique habituel.
On notera qu'un PLAN peut être assimilé à une surface ayant un rayon de courbure R infini.
On retrouve alors tous les théorèmes d'Euclide.

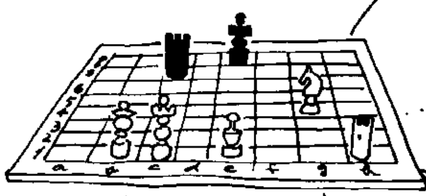


LE CONCEPT DE DIMENSION

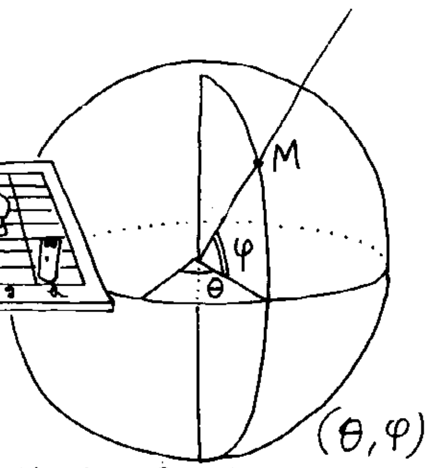
le nombre de dimensions est simplement le nombre de quantités, de coordonnées, qu'il faut se donner, dans un espace quelconque, pour y définir un POINT.

les SURFACES sont des représentations d'espaces à deux dimensions. les quantités servant au repérage peuvent être des longueurs, des nombres, des angles...



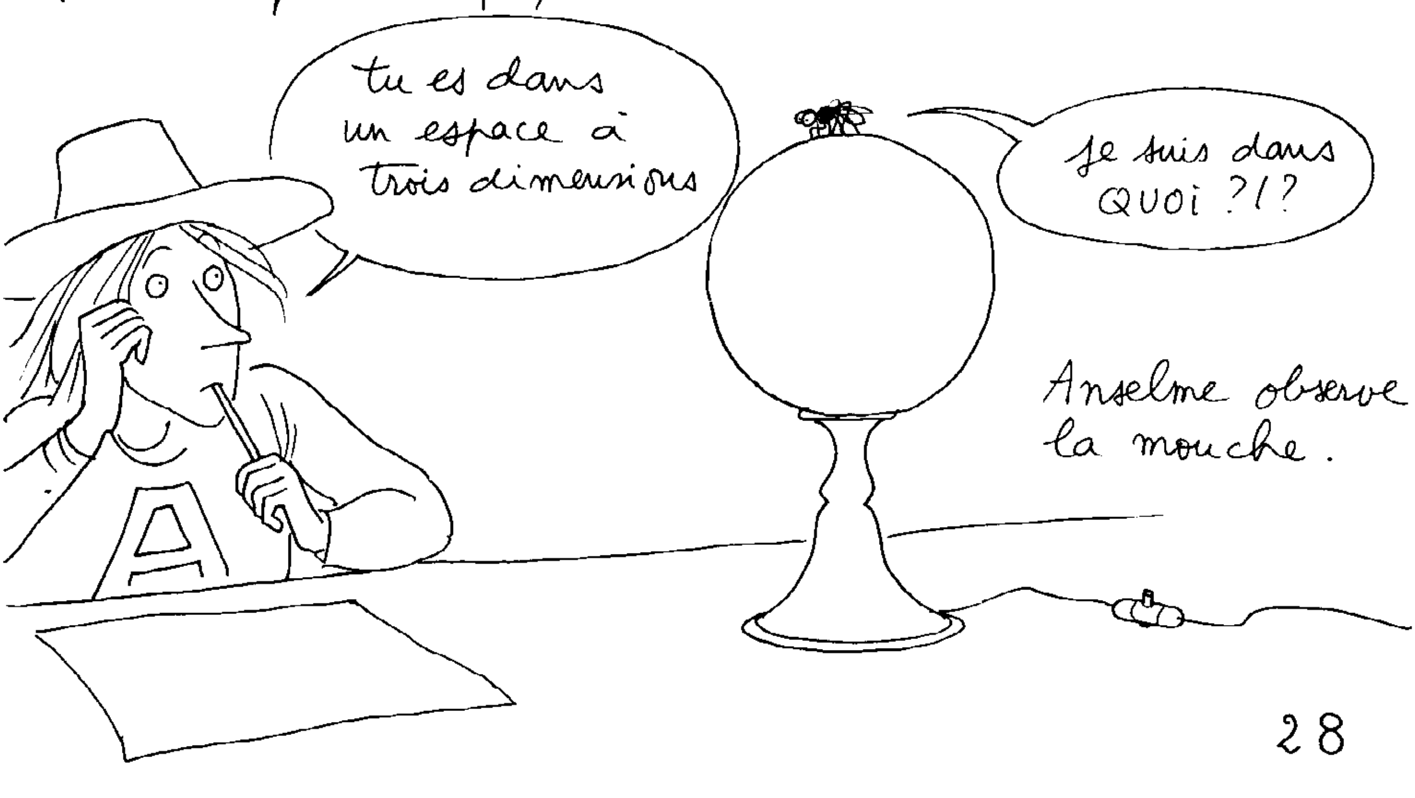


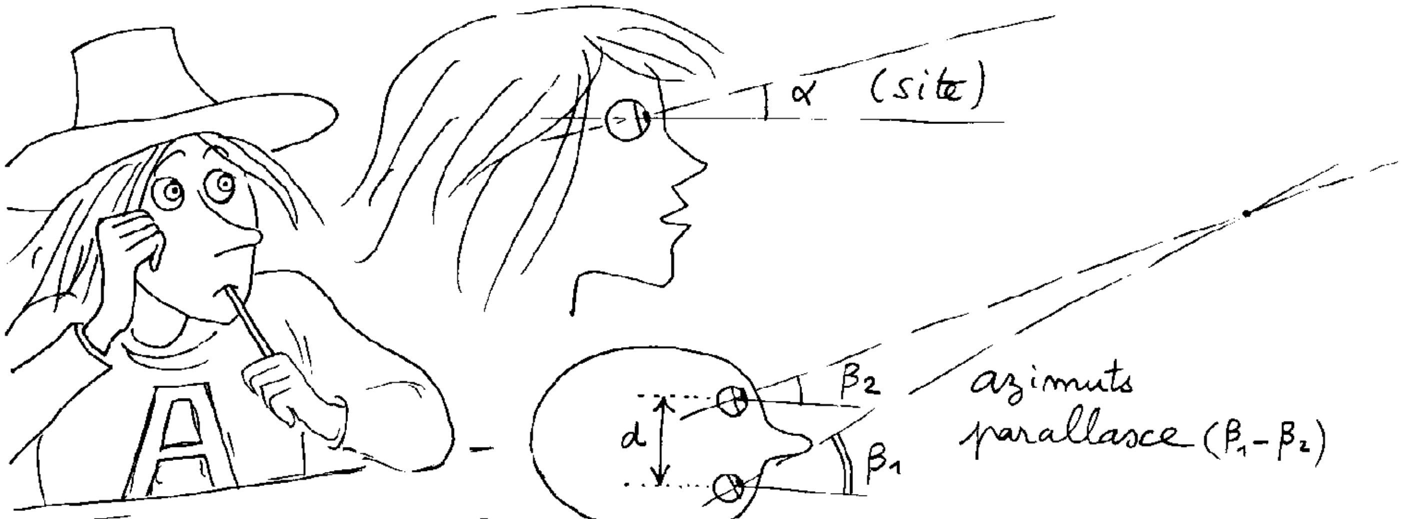
cheval en g4



longitude, latitude

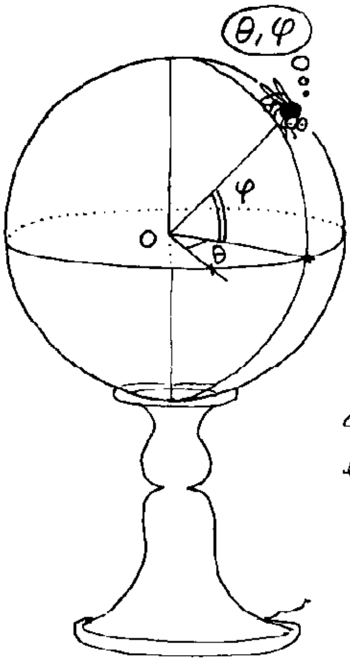
On a coutume de dire que notre espace, si on excepte le temps, a trois dimensions.





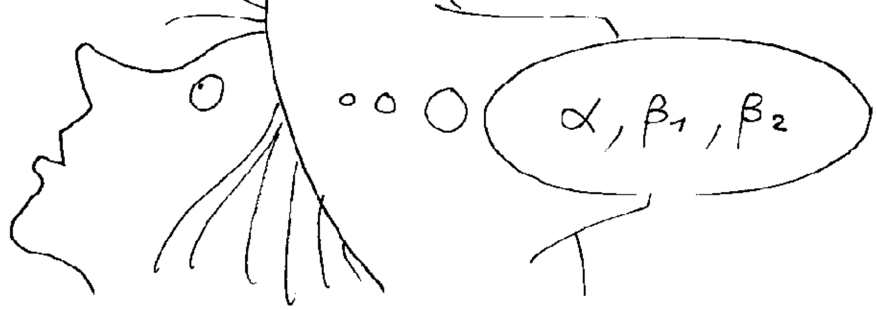
Anselme repère les objets par rapport à son corps, à sa boîte crânienne. La position d'un objet ponctuel est connue à l'aide de trois ANGLES : le site et les calages azimutaux de ses deux yeux : β_1 et β_2. La différence angulaire $\beta_1 - \beta_2$ s'appelle la parallaxe. Dans le cerveau d'Anselme s'effectue un décodage qui transforme cette parallaxe en distance.

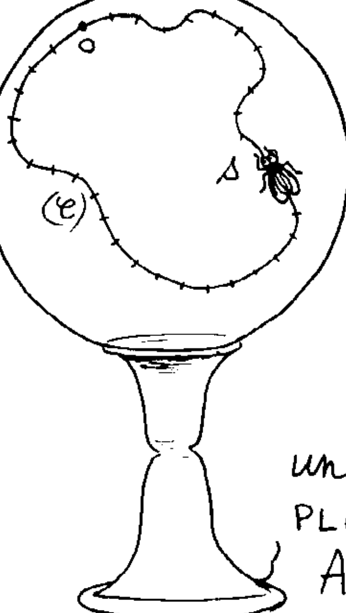
LE PLONGEMENT :



Mais la mouche évolue également sur le globe sphérique de la lampe où sa position, dans cet espace bidimensionnel, peut être repérée à l'aide de deux angles θ et φ (longitude et latitude).

Nous dirons que cet espace à deux dimensions est PLONGÉ dans notre espace à trois dimensions.



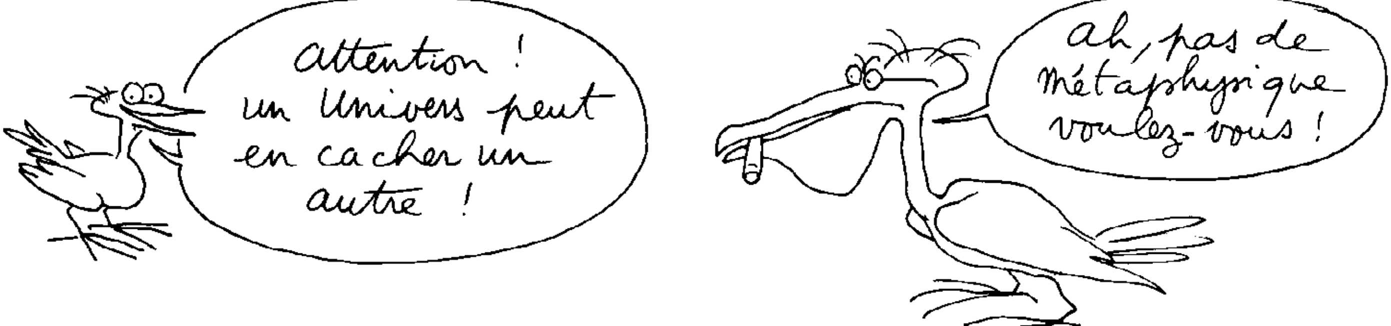


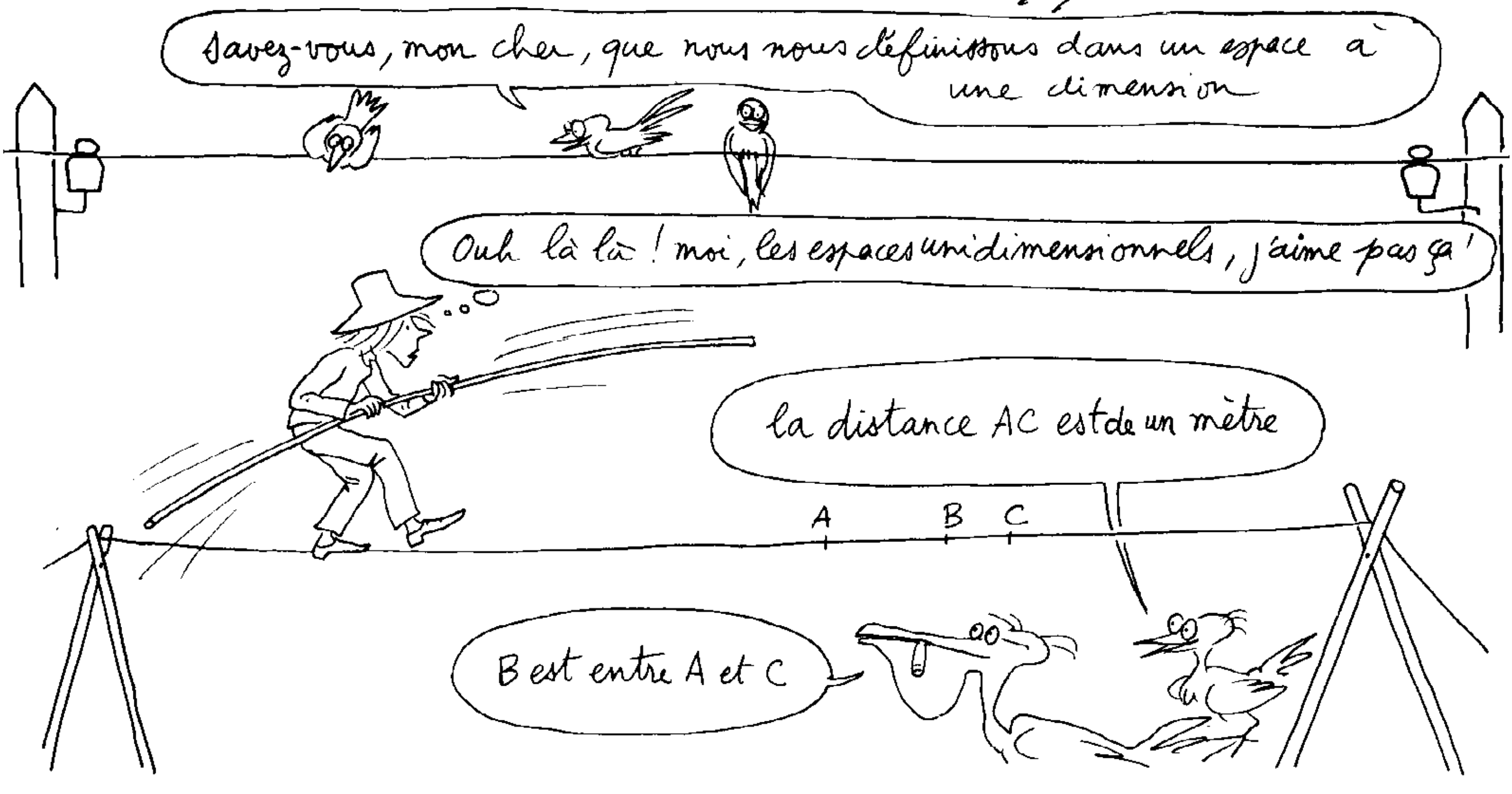
Supposons que la mouche suive une courbe (ℭ) tracée sur la sphère. On pourra repérer sa position à l'aide d'une seule coordonnée (sa distance s à un point origine, comptée algébriquement)

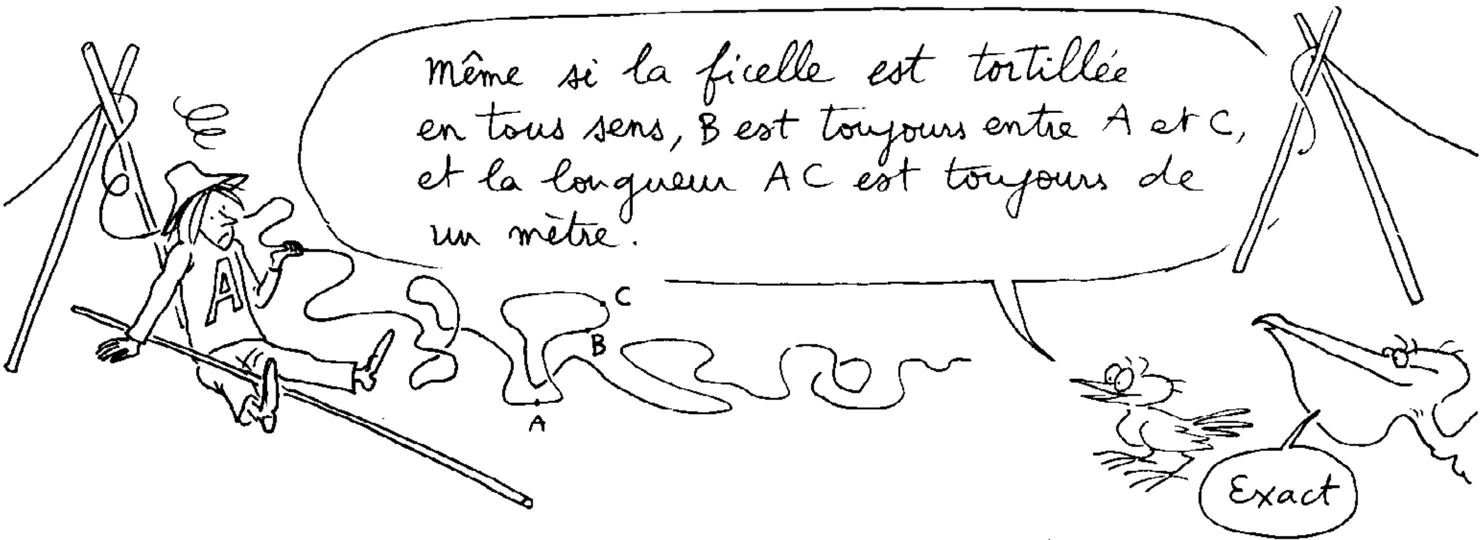
Une courbe est une image d'un espace à UNE dimension.

Cet espace unidimensionnel est plongé dans un espace bidimensionnel (sphère), lui-même PLONGÉ dans un espace tridimensionnel.

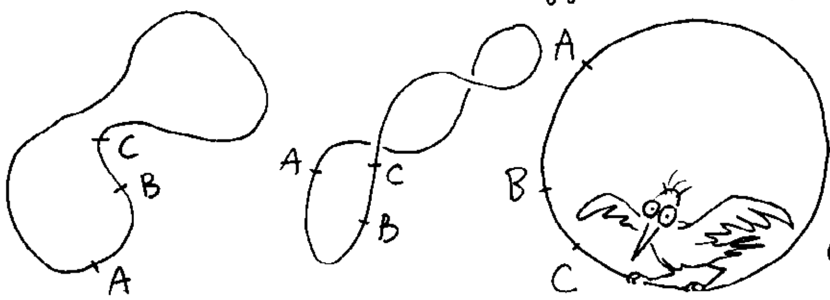
Ainsi l'espace où nous évoluons pourrait être plongé dans un espace de dimension supérieure sans que nous puissions en avoir conscience.







Ceci suggère que certaines propriétés peuvent être indépendantes de la manière dont s'effectue le plongement.



Voici différentes manières de PLONGER une COURBE FERMÉE dans l'espace ordinaire. Cette FERMETURE est une propriété indépendante du plongement.

Mais nous nous sommes bien gardés d'étirer ou de contracter la ficelle, afin de ne pas modifier les LONGUEURS entre des points successifs. Nous allons maintenant PLONGER des SURFACES dans l'espace à trois dimensions ordinaire

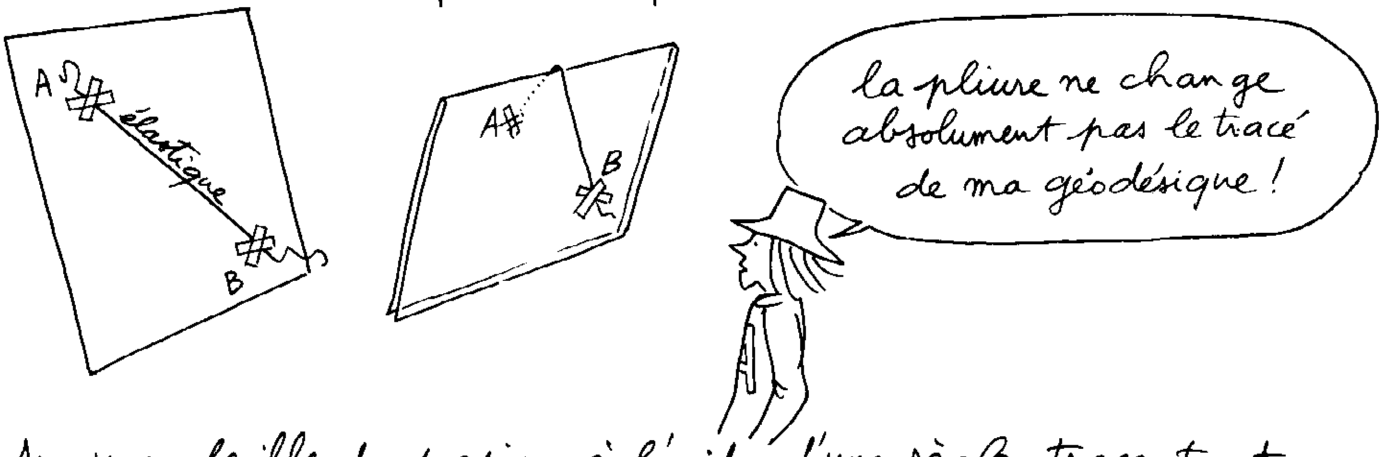
Si nous PLONGEONS un PLAN dans l'espace à trois dimensions ordinaire, nous pouvons le déplacer, le faire tourner, ... sans modifier sa GÉOMÉTRIE

Nous avons vu que le fait de déformer un plan suivant un cylindre ne modifiait ni les géodésiques, ni les angles.

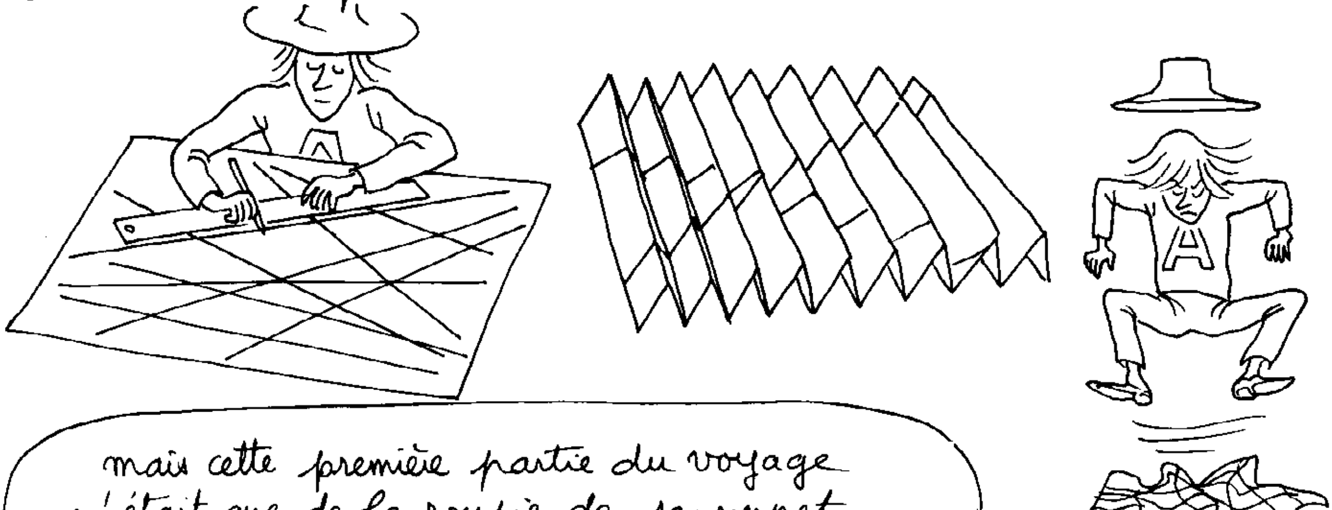
Dans cette optique, une tôle ondulée a toujours une géométrie PLANE, EUCLIDIENNE.

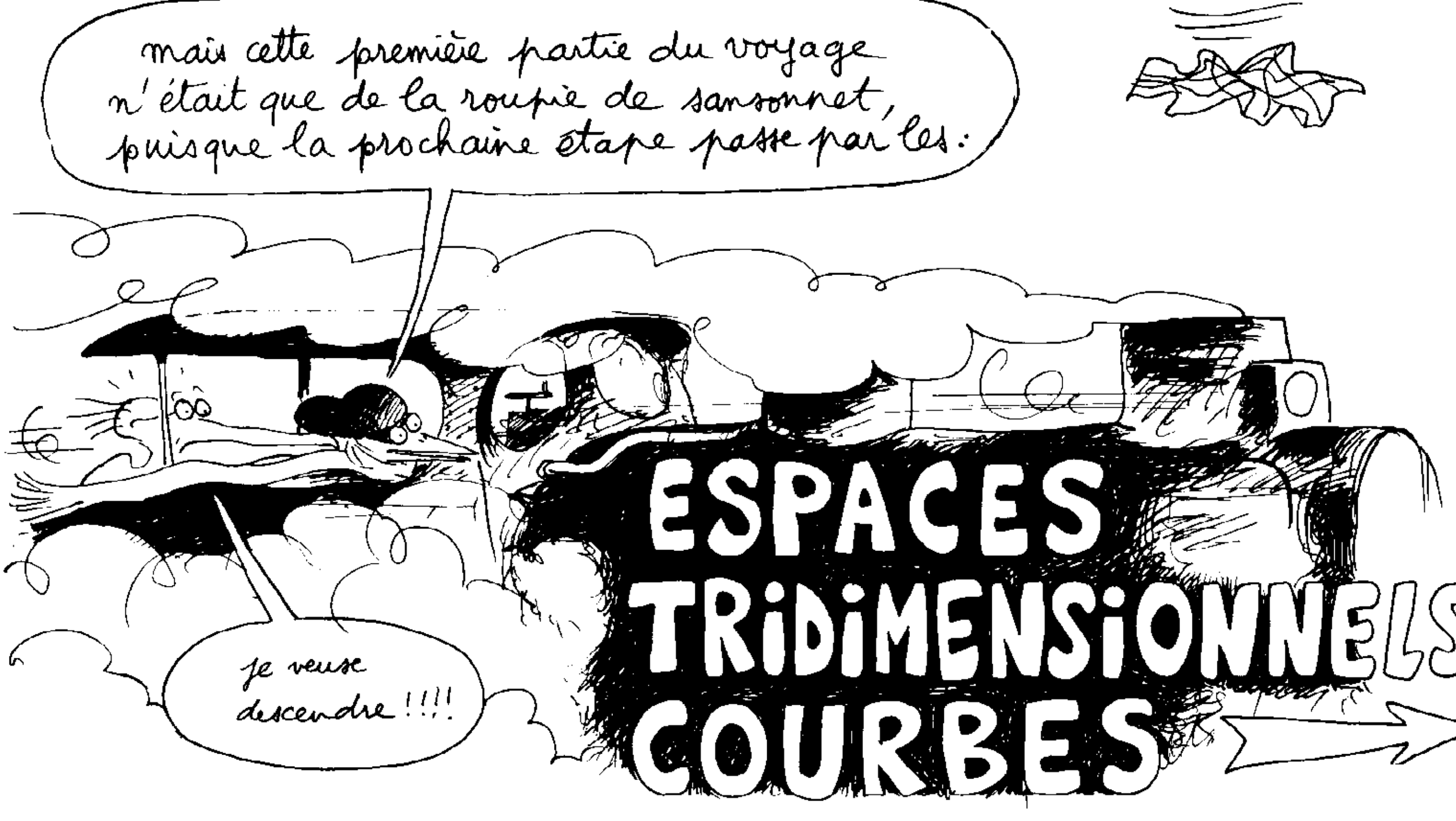
Un habitant d'un tel espace bidimensionnel, euclidien, n'aurait aucune conscience des translations, rotations ou ondulations, qui ne seraient que des variations du mode de plongement dans l'espace tridimensionnel.

Prenons un élément de plan et plions-le :



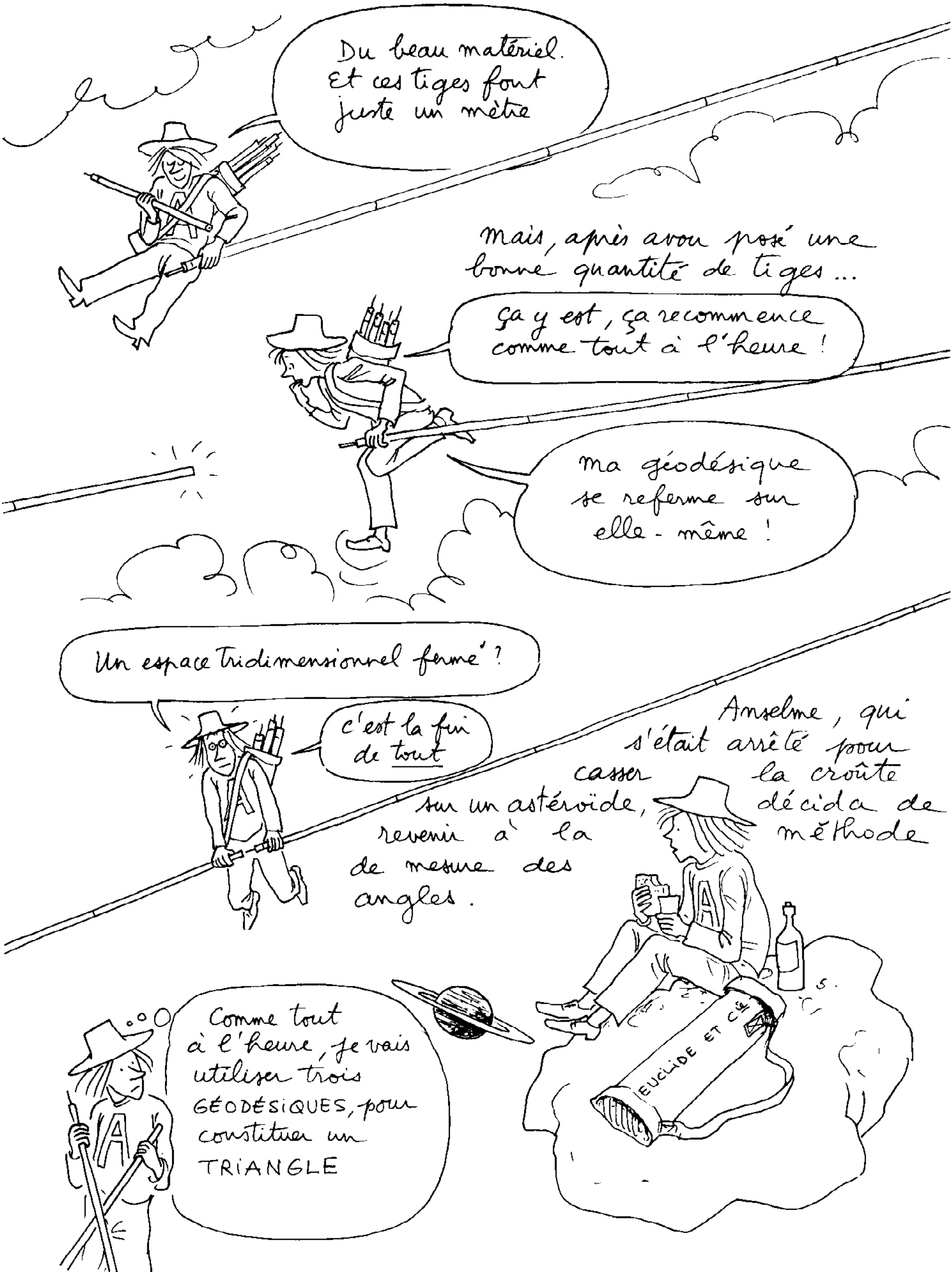
Sur une feuille de papier, à l'aide d'une règle, tracez tout un lot de droites, de géodésiques, puis chiffonnez la feuille. Vous aurez toujours sous les yeux les géodésiques de la surface, avec ou sans plis.





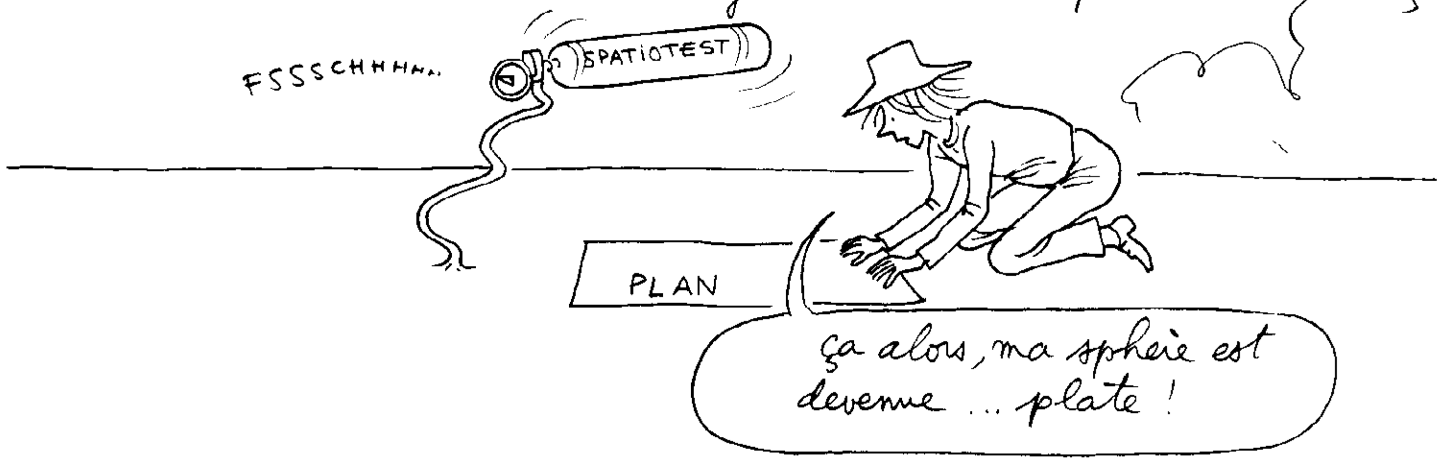

Monsieur Lanturlu ?
Certes
Je suis le représentant de la Maison Euclide et Cie. Nous savons que vous avez eu .... euh ... quelques déboires avec notre matériel.
EUCLIDE ET Cie
J'ai ici de nouveaux articles qui, cette fois, devraient vous donner entière satisfaction
Montrez toujours
L'Avenir est au tridimensionnel. Voyez-vous, la géométrie à deux dimensions est un peu...
... dépassée
FLUIDE COSMIQUE SPATIOTEST
Notre nouveau nécessaire à géodésiques...
... se compose de barres rigides, s'ajustant parfaitement les unes dans les autres.
qui vous permettront de n'aller ni à droite, ni à gauche, ni en haut, ni en bas mais TOUT DROIT !


Pour la mesure des surfaces, cette peinture. Cent grammes au mètre carré, exactement.
ingénieux
Pour la mesure des volumes, emplissez ceux-ci de gaz. Vous lisez directement la valeur sur le débimètre du SPATIOTEST
Et rappelez-vous : surface de la sphère : $4\pi l^2$, volume : $\frac{4}{3}\pi l^3$
entendu
EUCLIDE & Cie
quel métier !
Anselme a atterri, cette fois, dans un espace tridimensionnel et nous allons le suivre dans son exploration


Du beau matériel. Et ces tiges font juste un mètre
Mais, après avoir posé une bonne quantité de tiges...
ça y est, ça recommence comme tout à l'heure !
Ma géodésique se referme sur elle-même !
Un espace tridimensionnel fermé ?
c'est la fin de tout
Anselme, qui s'était arrêté pour casser la croûte sur un astéroïde, décida de revenir à la méthode de mesure des angles.
EUCLIDE ET Cie
Comme tout à l'heure, je vais utiliser trois GÉODÉSIQUES, pour constituer un TRIANGLE


?!?
mes géodésiques sont convenablement emboîtées, et pourtant la somme de mes trois angles est supérieure à 180° !!.
Bon...
SPATIOTEST
Je vais en fabriquer une et je mesurerai son volume et sa surface
FSCHHHHHHHH
Une sphère de rayon ℓ est l'ensemble des points situés à une distance ℓ d'un point fixe, que j'appellerai N
La surface est inférieure à $4\pi\ell^2$
Voilà déjà le volume qui est inférieur à $\frac{4}{3}\pi\ell^3$!
Je me suis encore fait avoir

Anselme accroît encore le rayon l de la sphère



Encore et encore ...

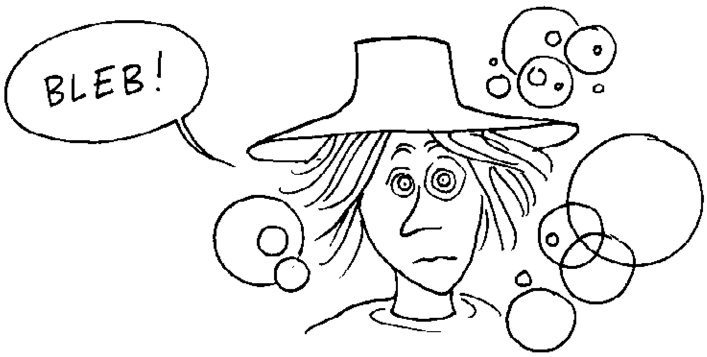
Un peu plus tard :

Ainsi, en gonflant un ballon tout bête dans un espace à trois dimensions, Lanturlu a fini par se retrouver... DEDANS!

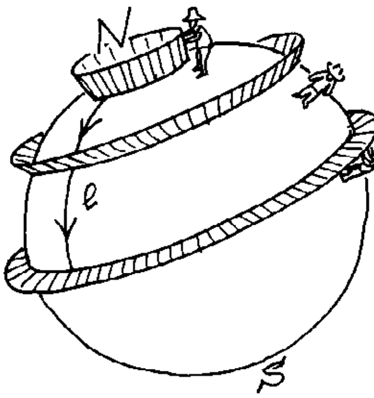
S'il n'avait pas coupé la bouteille à temps, il aurait péri écrasé, tout comme il avait fini par se retrouver emprisonné par sa clôture, page 13.

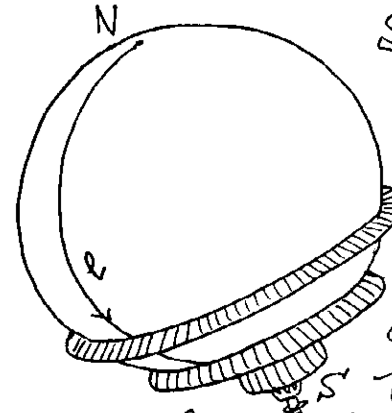
Avec la meilleure volonté du monde, on ne peut plus maintenant VISUALISER la COURBURE de cet espace tridimensionnel. Ses géodésiques se referment et son volume ne représente qu'un nombre FINI de mètres cubes, de même que la surface de notre planète, surface fermée, n'offre qu'un nombre FINI de mètres carrés.

La somme des angles d'un triangle, de cet espace à trois dimensions, est supérieure à 180°. Pour "VOIR" sa courbure, il faudrait être capable de percevoir dans quatre dimensions.



On peut toujours se dire que notre UNIVERS à trois dimensions est une HYPERSURFACE, plongée dans un espace à quatre dimensions, lui-même peut-être hypersurface plongée dans un espace à cinq dimensions, etc... Mais, de nos jours, il n'est pas de bon ton de dire de telles choses.





Sur sa sphère, en agrandissant le rayon l de son domaine, Lanturlu avait fini par se retrouver aux antipodes S du point N, centre de son cercle, et étouffé par sa propre clôture.

Dans l'espace tridimensionnel à courbure positive, même chose. Dans cet espace bidimensionnel qu'est la sphère, Anselme rencontrait l'EQUATEUR quand il avait enclos la moitié de la surface disponible. L'EQUATEUR de l'espace tridimensionnel HYPERSPHÉRIQUE existe aussi. Anselme y parvient lorsque son ballon occupe la moitié du volume disponible. Sur la sphère, le cercle équateur lui apparaissait comme une DROITE. De même, dans l'espace hypersphérique, le "ballon équateur" aura pour lui l'apparence d'un PLAN.

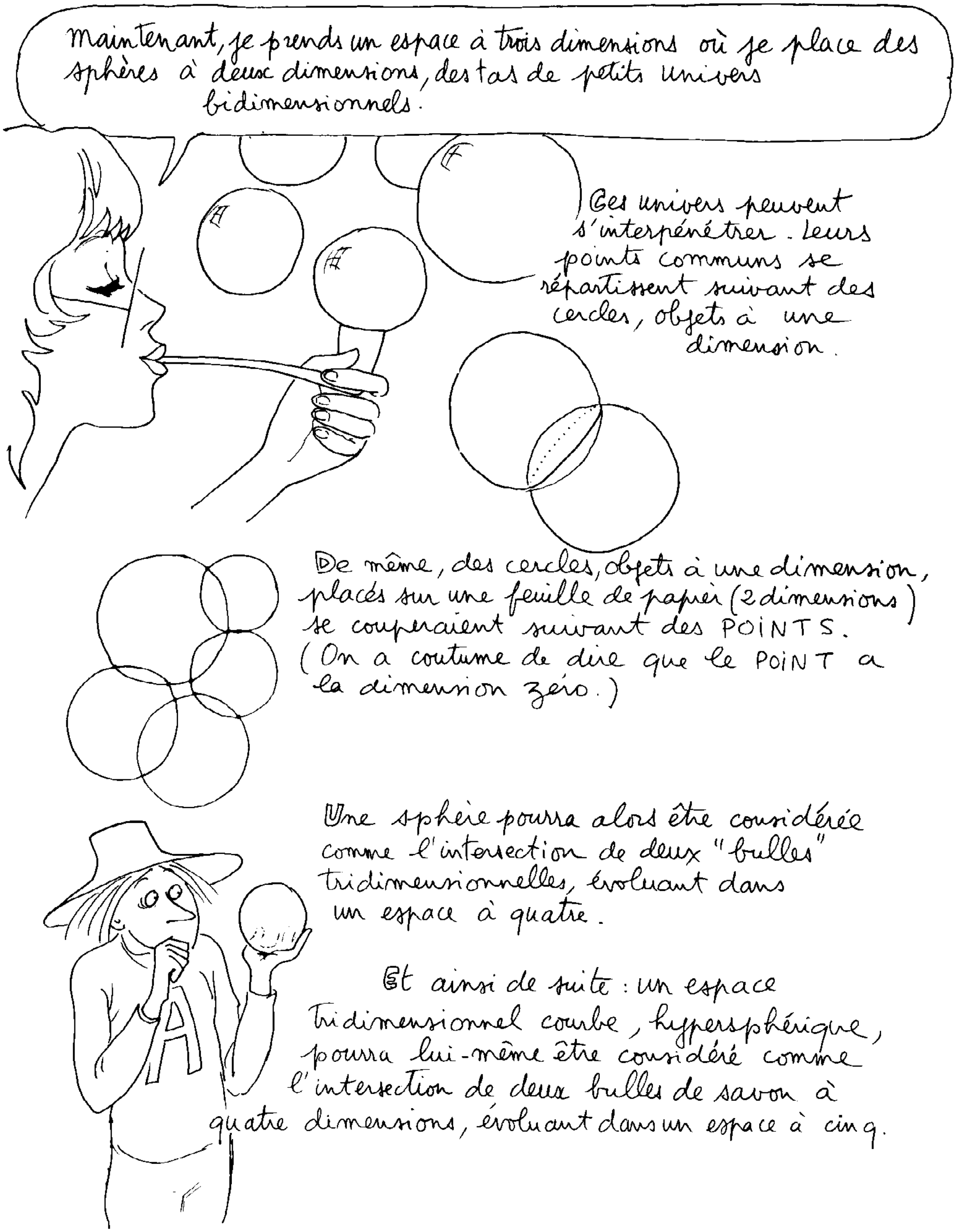
Au-delà de l'équateur la CONCAVITÉ du ballon s'inverse et il vient automatiquement se centrer sur le point antipodal S du point N, centre du ballon.


des ennuis?
C'est à dire, euh... tout se mélange un peu dans ma tête.
Je m'appelle Sophie. les courbures en tous genres c'est mon rayon.
La navigation dans les hypersphères, ça surprend toujours un peu au début. Il faut éviter de se bloquer. On s'y fait petit à petit.
mouais...
J'ai un peu perdu le fil...


mais, le CENTRE de cette hypersphère, où est-il?
Si je dessine un cercle sur un PLAN, on est bien d'accord que c'est une représentation d'un espace à une dimension, fermé, PLONGÉ dans un espace à deux dimensions : le PLAN
Et le centre du cercle N'EST PAS sur le cercle
mmm...
Une sphère représente un espace fermé à DEUX dimensions, PLONGÉ dans un espace à trois. Le centre de cette sphère N'EST PAS non plus sur la sphère. Il est dans l'espace à trois dimensions.
Le centre d'un espace hypersphérique à trois dimensions pourrait se situer dans un espace à quatre, en supposant qu'il y soit PLONGÉ. Et ainsi de suite...
Ainsi le centre d'un espace hypersphérique à quatre dimensions serait dans un espace à cinq, etc...


N.
tiens, te revoilà, dans ton monde à deux dimensions, plaqué dessus, comme une petite décalcomanie.
Et tu commences à gonfler ton cercle, qui n'est qu'une sphère à une dimension
N.
Dans un espace à deux dimensions, une frontière délimite une surface. Alors que, dans un espace à trois dimensions, elle délimite un volume.
Là, c'est quand j'arrive à la moitié de cet espace sphérique.
Dans un espace à 4 dimensions, une frontière aurait trois dimensions, et délimiterait un hypervolume à quatre dimensions.
Ça y est il recommence!
félons!
N
Regarde, ici, ton cercle, qui est un "ballon à une dimension", commence à contenir plus de la moitié de l'espace disponible. Il commence à se refermer sur toi, en convergeant vers le point antipodal S.
S

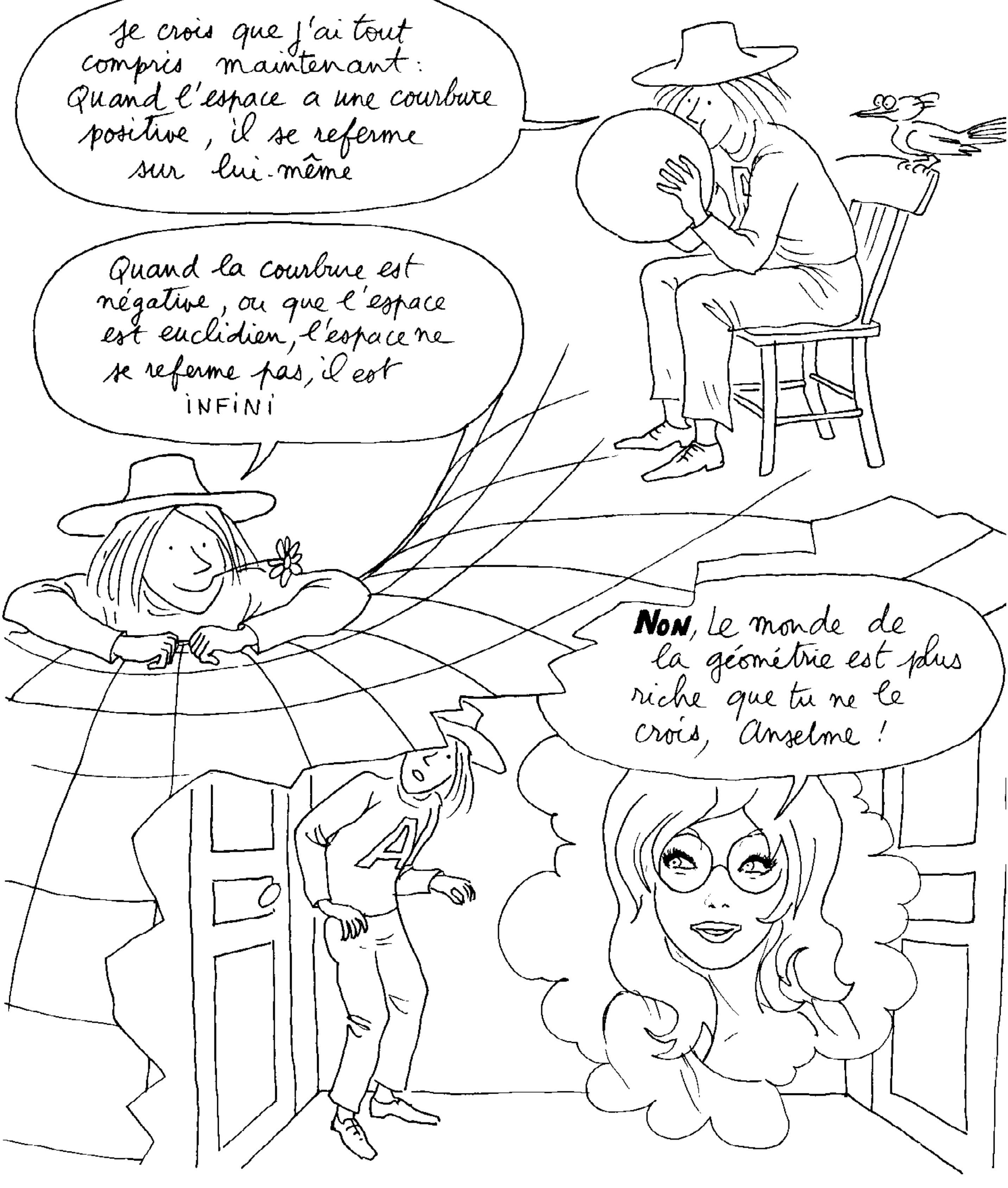
De même, dans mon espace courbe à trois dimensions, lorsque j'injecte plus de la moitié du volume total, le ballon se referme sur moi, en convergeant vers le point antipodal
Car la sphère, dans cet espace tridimensionnel courbe, a évidemment deux centres, qui sont antipodaux.
J'ai compris !
?!!?
Enfin, je ne sais pas exactement ce que j'ai compris, mais j'ai l'impression d'avoir compris quelque chose
quelle angoisse !
Mais non, Anselme, quand il y a plus de trois dimensions, **COMPRENDRE C'EST EXTRAPOLER**
J'extrapole sans le savoir
Le dessin, c'est vous qui allez le faire... ...dans votre tête !

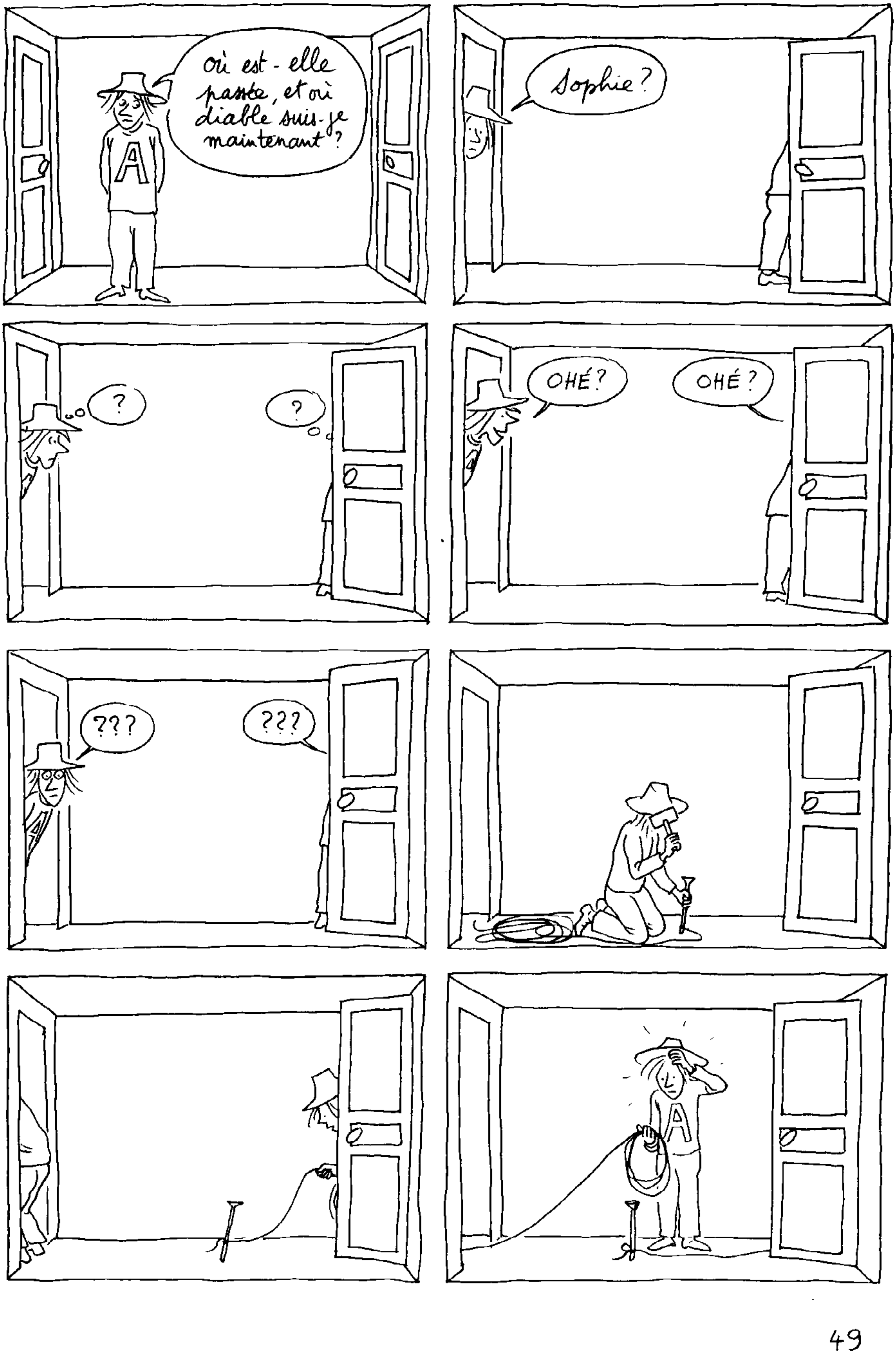

Maintenant, je prends un espace à trois dimensions où je place des sphères à deux dimensions, des tas de petits univers bidimensionnels.
Ces univers peuvent s'interpénétrer. Leurs points communs se répartissent suivant des cercles, objets à une dimension.
De même, des cercles, objets à une dimension, placés sur une feuille de papier (2 dimensions) se couperaient suivant des POINTS. (On a coutume de dire que le POINT a la dimension zéro.)
Une sphère pourra alors être considérée comme l'intersection de deux "bulles" tridimensionnelles, évoluant dans un espace à quatre.
Et ainsi de suite : un espace Tridimensionnel courbe, hypersphérique, pourra lui-même être considéré comme l'intersection de deux bulles de savon à quatre dimensions, évoluant dans un espace à cinq.

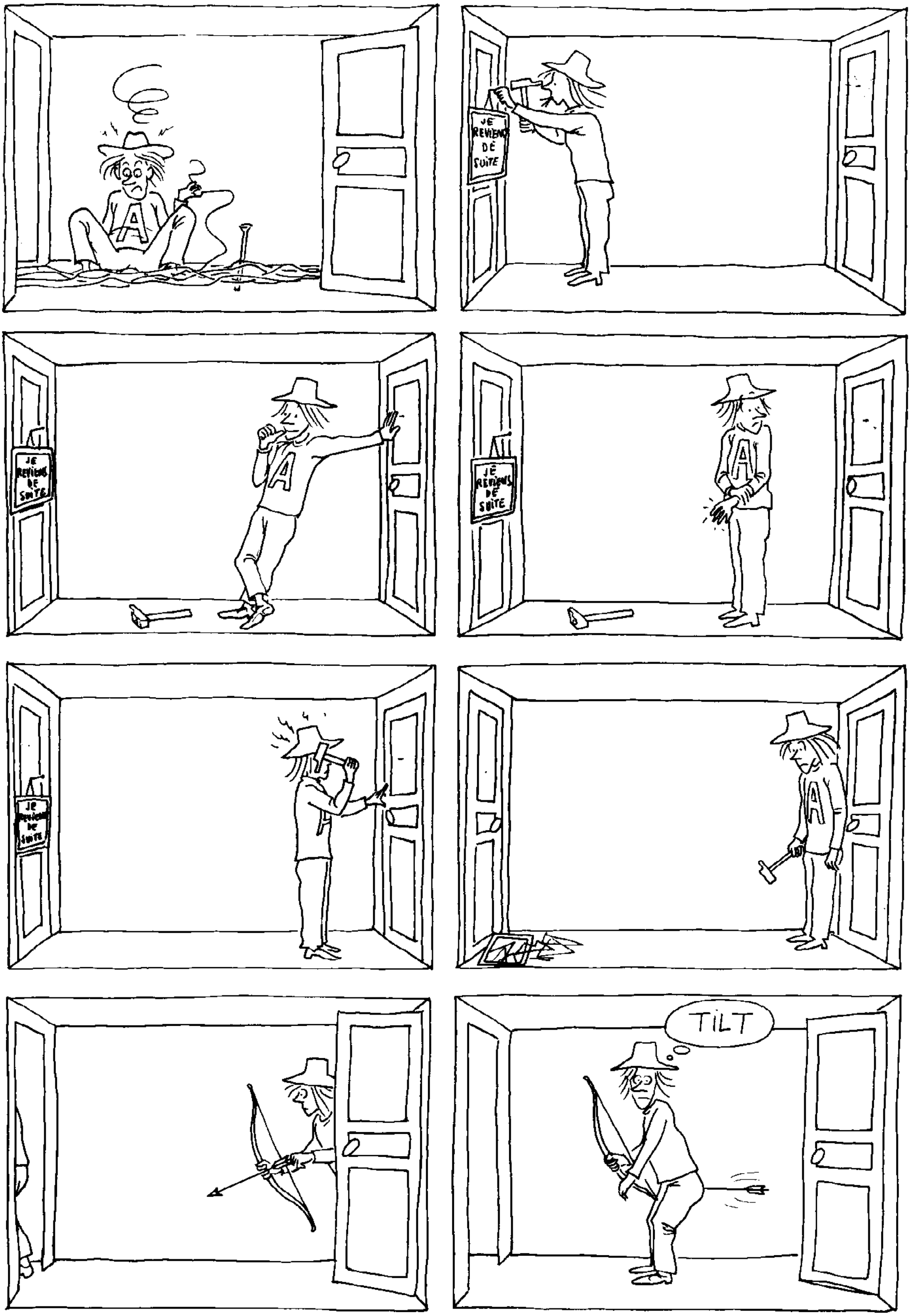

Anselme et Sophie, après avoir connu les vertiges de l'extrapolation, reprennent l'exploration de nouveaux mondes tridimensionnels.
les mathématiques ne sont plus ce qu'elles étaient
Tu vois, ça c'est un ruban adhésif tridimensionnel, pour les géodésiques. La partie collante est au bout... évidemment.
Dis donc, dans cet espace, les géodésiques n'ont pas l'air de se refermer. Et maintenant quand je gonfle le ballon du SPATIOTEST, le volume débité est supérieur à $\frac{4}{3}\pi \ell^3$, tandis que la surface est supérieure à $4\pi \ell^2$. Quant à la somme des angles d'un triangle, elle est cette fois inférieure à 180°
Rappelle-toi page 23, tu es à nouveau dans un espace à courbure NÉGATIVE.


RÉSUMÉ :
Dans les espaces à trois dimensions, beaucoup de choses peuvent arriver, tu sais. C'est comme pour les surfaces, qui sont, elles, des espaces à deux dimensions. Ainsi, si la somme des angles d'un TRIANGLE, dans un espace à trois dimensions, est supérieure à 180°, nous dirons que la courbure est positive. En y formant une sphère de rayon ℓ, tu trouveras par le SPATIOTEST un volume inférieur à $\frac{4}{3}\pi\ell^3$ et une surface inférieure à $4\pi\ell^2$. Cet espace, dit HYPERSPHÉRIQUE, se refermera sur lui-même. Si la somme des angles d'un triangle, dans un espace tridimensionnel, est inférieure à 180°, alors la courbure sera négative. Le volume d'une sphère de rayon ℓ sera supérieur à $\frac{4}{3}\pi\ell^3$ et sa surface supérieure à $4\pi\ell^2$. Cet espace aura une extension infinie.
mais si la somme des angles vaut 180°, alors l'espace est bêtement euclidien.
tout ça pour en arriver là !..

IL FAUT QU'UN ESPACE SOIT OUVERT OU FERMÉ !...




Où est-elle passée, et où diable suis-je maintenant?
Sophie?
?
?
OHÉ?
OHÉ?
???
???

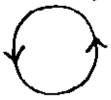

JE REVIENS DE SUITE
TILT


Eh oui, Lanturlu avait été projeté dans un espace cylindrique à trois dimensions.
Bien qu'euclidien, sans courbure, (la somme des angles d'un triangle y est égale à 180°) ce monde se referme sur lui-même.
TILT
Bon, admettons... Mondes sphériques, hyperboliques, cylindriques. On a fait le tour, non ?
GÉOMÉTRIE
Vous croyez ?
Effectuons un petit retour dans le bidimensionnel.
Hé !?
NUAGES

SANS DESSUS DESSOUS :

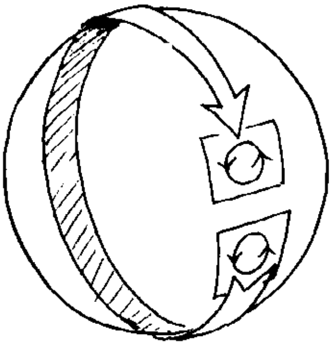
Ça se referme, comme tout à l'heure
Somme des angles : 180°. C'est euclidien, ce machin. Encore le coup du cylindre !
Ben non !...
!?!
Ça alors !
POINT DE DÉPART DE LA GÉODÉSIQUE
Pour tout vous dire, Anselme, cette fois, s'est retrouvé dans un ESPACE BIDIMENSIONNEL INORIENTABLE. L'image la plus connue d'un tel espace est la bande de Möbius (1830). L'idée avait échappé aux Grecs, qui pourtant avaient pensé à tout.
POINT DE DÉPART DE LA GÉODÉSIQUE
Sophie, sors-moi de là

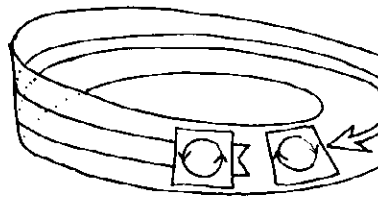
Traçons un cercle sur une surface, et fléchons-le arbitrairement.



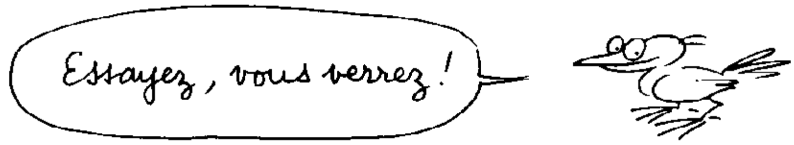
Imaginons que ce cercle soit une petite décalcomanie que nous pouvons faire glisser à volonté sur cette surface.

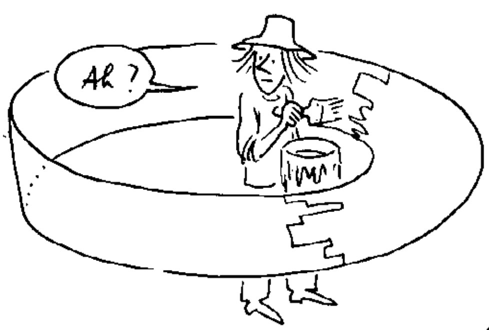
Si le cercle se retrouve identique à lui-même, nous dirons que cette surface est ORIENTABLE (c'est le cas de la sphère, du cylindre, du plan, etc...). Mais si cette décalcomanie glisse sur un ruban de Möbius, il en va tout autrement :





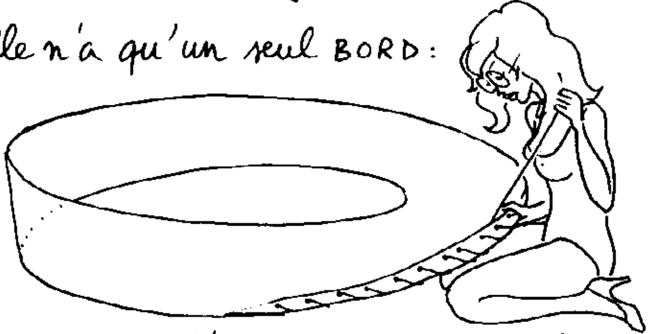
A chaque fois qu'il fait le tour de cet univers à deux dimensions, le cercle change d'orientation





Corrélativement, on ne peut pas peindre une bande de Möbius de deux couleurs différentes : elle n'a qu'un seul côté, elle est UNILATÈRE

Elle n'a qu'un seul BORD :

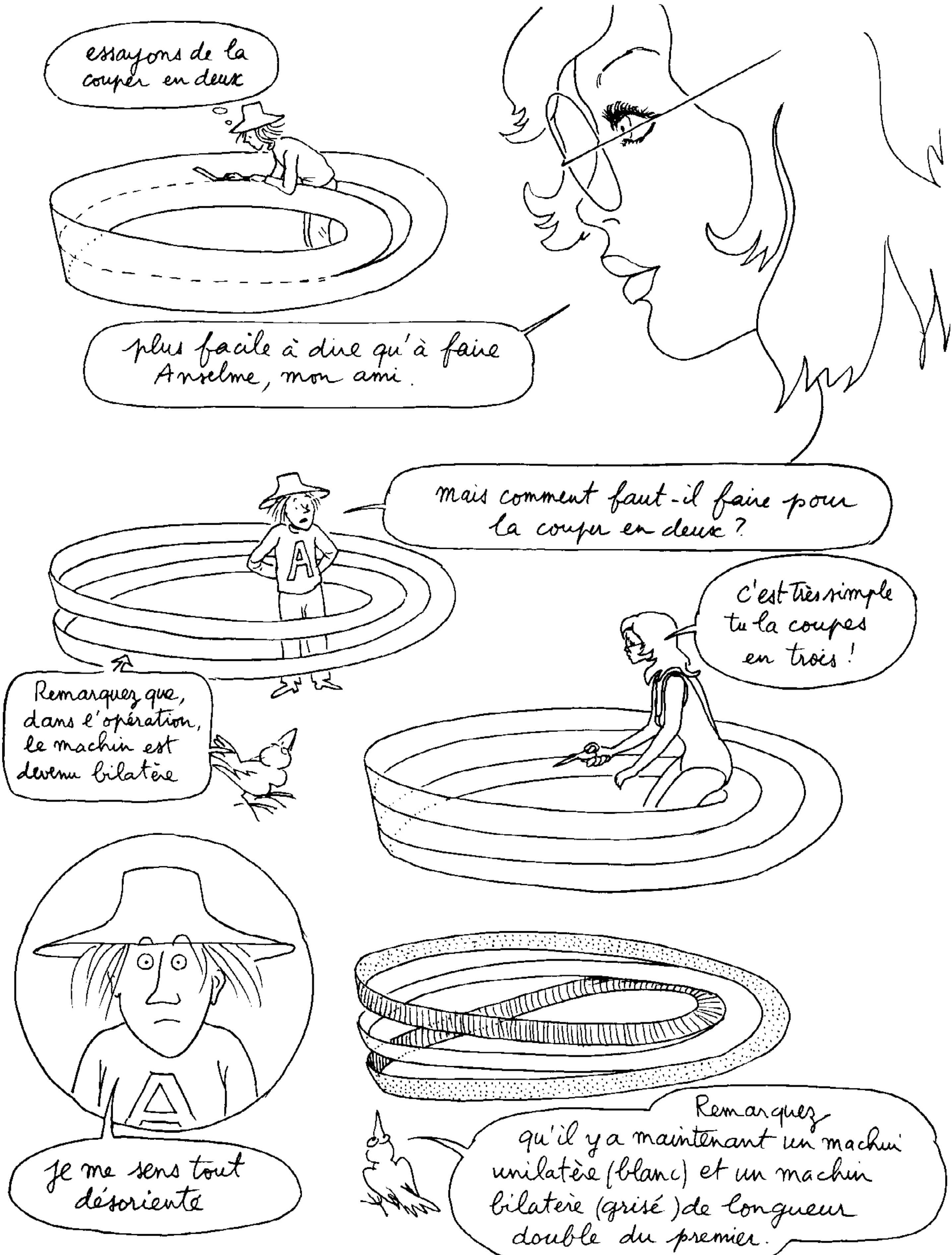


On peut l'ourler en une seule fois!

Anselme a décidé de planter des clous pour marquer l'intérieur et l'extérieur.

L'opération se solde par un échec car cette bande...

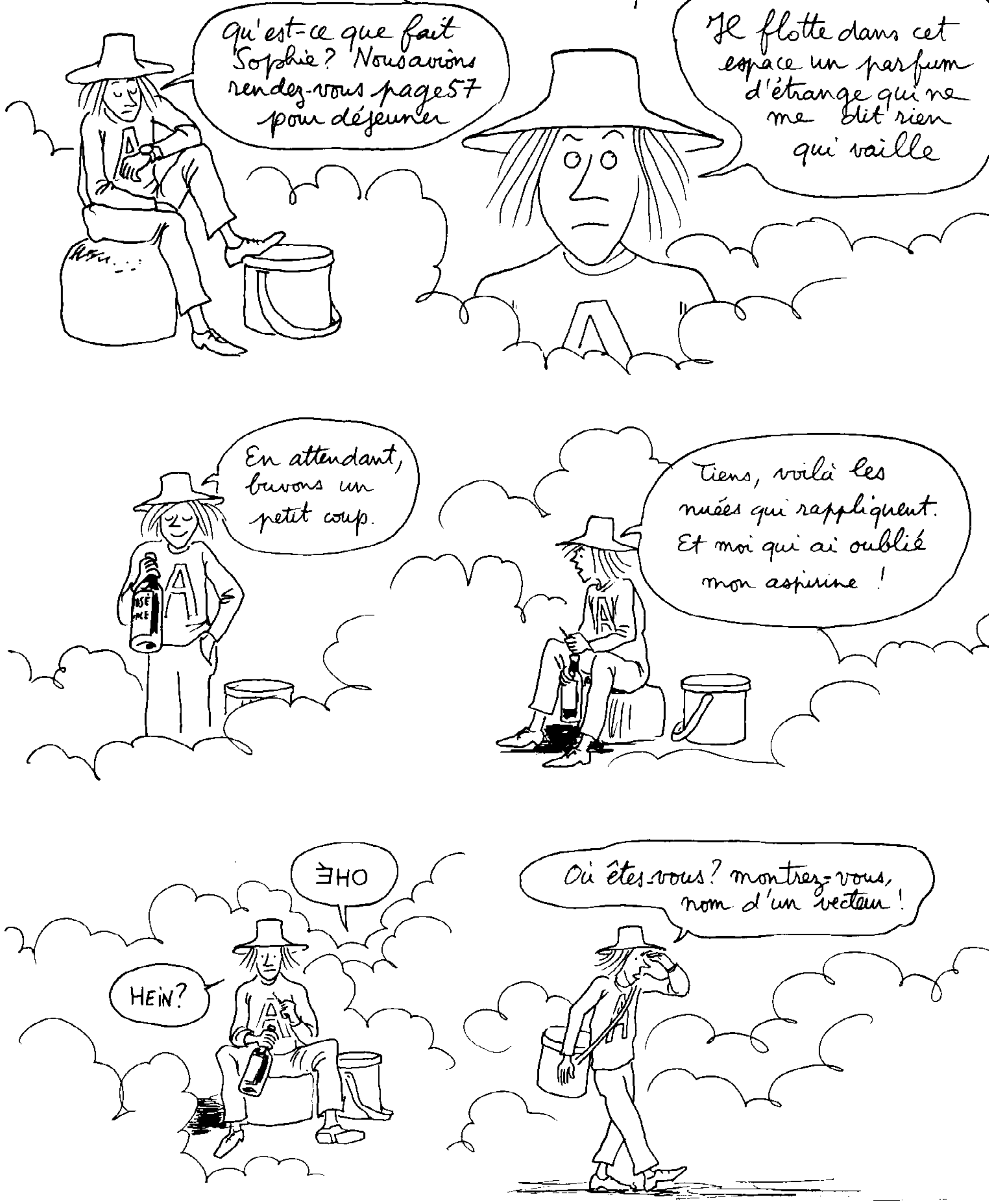
n'a ni extérieur ni intérieur!

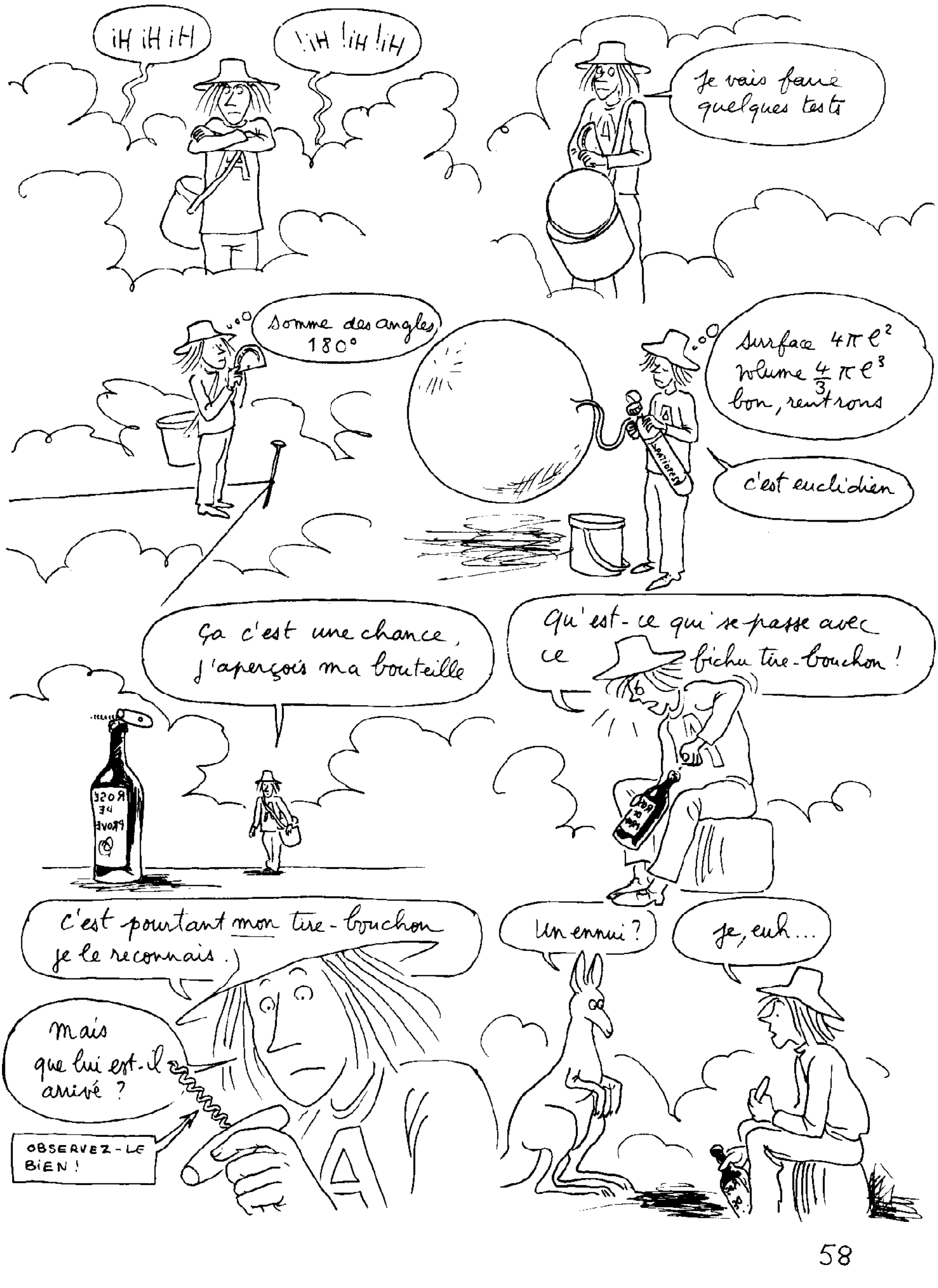

essayons de la couper en deux
plus facile à dire qu'à faire Anselme, mon ami.
mais comment faut-il faire pour la couper en deux?
Remarquez que, dans l'opération, le machin est devenu bilatère
C'est très simple tu la coupes en trois!
je me sens tout désorienté
Remarquez qu'il y a maintenant un machin unilatère (blanc) et un machin bilatère (grisé) de longueur double du premier.

Après cette promenade sur la bande de Möbius, revenons dans les espaces euclidiens (sans courbure) à trois dimensions :

L'orientation de l'espace :

Accompagnons Lanturlu dans son exploration d'un nouveau monde tridimensionnel euclidien (sans courbure) -

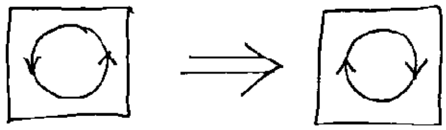




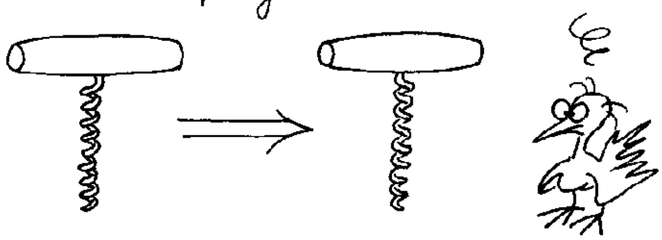
Hi! Hi! Hi!
Hi! Hi! Hi!
Je vais faire quelques tests
Somme des angles 180°
Surface $4\pi\ell^2$ volume $\frac{4}{3}\pi\ell^3$ bon, rentrons
c'est euclidien
Ça c'est une chance, j'aperçois ma bouteille
Qu'est-ce qui se passe avec ce fichu tire-bouchon !
C'est pourtant mon tire-bouchon je le reconnais.
Mais que lui est-il arrivé ?
OBSERVEZ-LE BIEN !
Un ennui ?
Je, euh...


c'est un rosé de Provence, de qualité assez ordinaire, somme toute...
ROSÉ DE PROVE
vous avez un tire-bouchon?
Euh... oui
Si tous les kangourous du monde voulaient se donner la main
BLUB BLUB BLUB
Vous n'avez rien remarqué d'anormal ?
Non, vous avez un peu mauvaise mine, c'est tout
Prenez un peu de bisulfite de parmesan deux fois par jour
bonne continuité
CLOP
CLOP
CLOP
CLOP
quelqu'un bricole mon tire-bouchon et un kangourou ivrogne me siffle mon rosé. Qu'est-ce que c'est que cette affaire-là ?
Peste !
SBLING !
NOUS NE SAURIONS TROP VOUS INCITER À OBSERVER CE TIRE-BOUCHON AVEC LA PLUS GRANDE ATTENTION

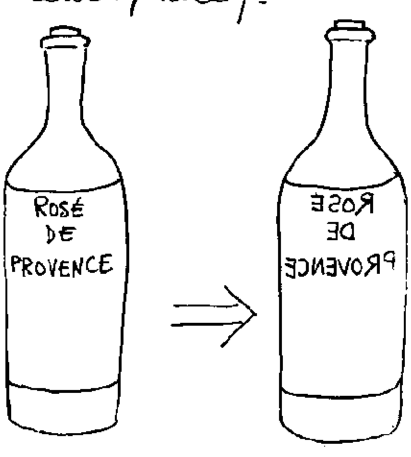
La bande de Möbius (espace inorientable à deux dimensions) a donc un équivalent tridimensionnel. Sur la bande de Möbius, lorsque le cercle décalcomanie faisait le "tour" de cet espace euclidien, son orientation changeait :



Voir page 54



On remarquera que ces objets sont "en miroir".
Le tire-bouchon, ou Anselme lui même, peuvent être considérés comme des "décalcomanies à trois dimensions". A chaque fois qu'un objet fait le "tour" de cet espace tridimensionnel, son orientation s'inverse. Comme nous sommes censés avoir accompagné Lanturlu dans son périple circumspatial, il est normal que nous retrouvions, avec lui, la bouteille "en miroir" et le tire-bouchon vissant dans un sens inhabituel. Un second "tour" de cet univers nous redonnerait la vision initiale des choses (à condition que nous laissions les objets à leur place).



Anselme et le kangourou (de l'espèce des antipodiens) habitent le même espace, mais ils diffèrent en ce sens que ce qui est "à l'endroit pour le kangourou" est "à l'envers pour Lanturlu", et vice-versa.


EPILOGUE :
Tout va de travers. Il n'y a plus ni droite, ni gauche, ni envers ni endroit. Vers où cela mène-t-il ? et quel chemin suivre ?
Il faut suivre les géodésiques, Anselme, les géodésiques de ta vie.
On ne me fera jamais croire, à moi, que l'Univers est aussi biscornu. Ce sont des délires de mathématicien.
C'est de la bande dessinée !
Pourquoi se préoccuper de tout cela, puisqu'il est évident que l'espace EST euclidien (*)
(*) Propos tenus en 1830 par Ostrogradsky, professeur titulaire de la chaire de mathématiques à Petrograd, après lecture des travaux de Riemann et Lobatchevsky.


Admettons que l'Univers ne ressemble pas à ce qu'il est. Vous imaginez tout cela, enseigné dans les écoles ?!!.
quel désastre !
Et puis, ce qui compte, finalement, c'est la vie. Et, pour la vie de tous les jours, vous conviendrez avec moi que ......
mais, qu'y-a-t-il derrière tout cela ?
la PHYSIQUE, mon chéri...
je VEUX tirer cela au clair !
En avant pour le CONCRET
Y-a quelqu'un ?


... si la densité moyenne de matière dans l'univers est inférieure à 10^{-29} grammes par cm^3...
?
... alors l'univers aura une courbure négative et sera d'extension infinie...
... par contre, si la densité est supérieure à 10^{-29} g/cm^3
!..
... l'univers sera hypersphérique et se refermera sur lui-même..
Mais si cette densité égale 10^{-29} g/cm^3, alors l'Univers sera euclidien
HUM...
Docteur Einstein, je présume ?
moui ?...
FiN